Niveau(x) d'enseignement : 7 Numéro EDUQ : 9270095
Centre d'intérêt : 841

Reumont, André

Projet mathétactiques : élaboration d'un modèle d'enseignement des mathématiques liant constructivisme et résolution de problèmes / André Reumont, Pierre Reumont. -- [Montréal] : Collège de Maisonneuve, [1991?]
154 p. en pag. multiple : ill. ; 28 cm.

Code : 1532-0328. Bibliogr. à la fin du v.

ISBN 2-920f20-10-9

Vedette(s)-secondaire(s) : Reumont, Pierre • Collège de Maisonneuve

Descripteur(s) : Mathématiques • Méthode d'enseignement • Résolution de problème • Behaviorisme • Modèle • Collégial (Ordre d'enseignement)

Identificateur(s) de sujet : Constructivisme

Le but de cette recherche est de produire un renouveau pédagogique dans l'enseignement des mathématiques au collégial en définissant une approche pédagogique liant résolution de problèmes et constructivisme. Après avoir fait état de l'enseignement des mathématiques dans les différentes ordres d'enseignement et des faiblesses du behaviorisme, le rapport expose les grandes lignes du constructivisme et de la résolution de problèmes. Le modèle d'enseignement élaboré à l'aide de ces deux approches est ensuite présenté et il est suivi de quelques exemples d'utilisation d'éléments de ce modèle. Le rapport identifie finalement certaines difficultés liées à l'implantation du modèle et lève le voile sur ses perspectives d'avenir.

Type de document :

Collège de Maisonneuve

PROJET MATHÉTACTIQUES

André Reumont et Pierre Reumont

Juin 1991

PROJET MATHÉTACTIQUES

Élaboration d'un modèle d'enseignement des mathématiques liant constructivisme et résolution de problèmes

Auteurs
André Reumont
Pierre Reumont

Réalisation graphique
Sylvie Pelletier

Édition électronique
André Reumont
Pierre Reumont

Imprimerie
Le Verset (Ste-Madeleine)

Dépôt légal: 3e trimestre 1991
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

ISBN 2-920820-10-9

Avant-propos

Ce rapport présente les résultats d'une recherche subventionnée par la Direction Générale de l'Enseignement Collégial (D G E C) dans le cadre du Programme d'Aide à la Recherche sur l'Enseignement et l'Apprentissage (PAREA). Le but de cette recherche est de produire un modèle d'intervention pédagogique en enseignement des mathématiques liant constructivisme et approche par résolution de problèmes. Nous tenons à remercier certaines personnes qui nous ont aidé à réaliser cette recherche.

D'abord nos remerciements vont à Madame Hélène Lavoie de la D G E C. qui s'est souciée de nos conditions de travail. Elle a réussi à dégager les ressources budgétaires nécessaires afin d'augmenter le dégrèvement initialement prévu de telle sorte que nous soyons libérés de toute charge d'enseignement à la session Hiver 1991.

Nous remercions aussi Monsieur Ulric Aylwin, responsable du Service de Développement Pédagogique du Collège de Maisonneuve, qui nous a soutenus dans notre démarche lors de la mise sur pied du projet et qui nous a régulièrement alimentés de textes utiles à notre recherche.

Nous désirons également exprimer notre gratitude à Monsieur Roland Guérin, documentaliste au CIRADE qui nous a gracieusement offert son aide, d'ailleurs fort précieuse, dans nos recherches bibliographiques ainsi qu'à Madame Sylvie Pelletier, graphiste au Collège de Maisonneuve, qui a réalisé les illustrations des séparateurs et de la couverture.

De plus, nous sommes très reconnaissants envers nos collègues, Madame Ginette Ouellette et Monsieur Richard Leblanc, enseignants de mathématiques au Collège de Maisonneuve. Chacun a joué le rôle de personne-ressource avec grande efficacité. Ils ont discuté avec nous des lignes directrices du projet, lu avec intérêt nos textes aux différentes étapes de production et apporté commentaires et suggestions fort pertinents. Leur professionalisme et leur connaissance du milieu collégial ont très bien servi cette recherche.

Les auteurs et le Collège assument l'entière responsabilité du contenu de ce rapport. On peut se procurer (au coût de 12$ l'unité) d'autres exemplaires de ce rapport en s'adressant au Service de Développement Pédagogique du Collège de Maisonneuve.

André Reumont
Pierre Reumont

Afin d'alléger ce texte, le générique masculin sera utilisé et ce, sans aucune intention de discrimination.

Table des matières

1. Introduction
- 1.1 Conceptions de l'activité mathématique
- 1.2 État de l'enseignement des mathématiques
  - Quelques exemples révélateurs
    - Ordre primaire
    - Ordre secondaire
    - Ordre collégial
    - Ordre universitaire
  - Le behaviorisme
  - Faiblesses du behaviorisme
  - Quelques traces du behaviorisme
- 1.3 Besoins de formation dans la société de demain
- 1.4 Description de la problématique
- 1.5 But et objectifs du projet

2. Le constructivisme
- 2.1 Des origines à nos jours
- 2.2 Une définition
- 2.3 Les mécanismes du constructivisme
  - La notion de schème
  - L'assimilation
  - L'accommodation
  - L'adaptation
  - Aspect social
  - En résumé
- 2.4 Quelques considérations d'ordre philosophique
- 2.5 Différences entre constructivisme et behaviorisme

3. La résolution de problèmes
- 3.1 La résolution de problèmes: c'est quoi?
  - Qu'est-ce qu'un problème?
  - La résolution de problèmes: quelques interprétations
- 3.2 La résolution de problèmes: comment?
  - Les heuristiques
  - Exemples de résolution de problèmes à l'aide d'heuristiques
    - Exemple en calcul différentiel et intégral
    - Exemple en algèbre vectorielle
    - Exemple en analyse combinatoire
  - La métacognition
- 3.3 La résolution de problèmes: pourquoi?
  - Résolution de problèmes et besoins de la société
  - Résolution de problèmes et formation fondamentale
  - L'habileté en résolution de problèmes augmente la confiance en soi
  - Résolution de problèmes et mathématiques: des liens indissociables et essentiels
  - La résolution de problèmes: outil de construction et d'organisation des connaissances
- 3.4 L'enseignement de la résolution de problèmes: un aperçu
  - Des dimensions essentielles
    - Les connaissances spécifiques de l'élève
    - Les heuristiques
    - Le contrôle
    - Les croyances et les attitudes de l'élève
  - Divers moyens pédagogiques
    - Interventions du professeur avec toute la classe
    - Travail en petits groupes
    - Travail individuel
  - Vers le modèle d'enseignement

Table des matières

4. Le modèle d'enseignement

4.1 Principes d'élaboration du modèle

4.2 Structure du modèle

4.3 Description des éléments du modèle

Analyse de contenu

Formulation des objectifs

Sélection, adaptation et création des tâches

Situation prospective

Activité d'exploration

L'enseignant et l'activité d'exploration

L'élève et l'activité d'exploration

Formalisation de premier temps

Activité de résolution d'exercices et de problèmes

Exercice compte-gouttes

Exercice de routine et problème d'assimilation

Problème d'enrichissement

Problème défi

L'enseignant et l'activité de résolution

L'élève et l'activité de résolution

Formalisation de deuxième temps

Formalisation sur le contenu mathématique

Formalisation sur la résolution de problèmes

Évaluation

Évaluation des éléments de connaissance

Évaluation de la compétence en résolution de problèmes

Ambiance de travail

5. Quelques exemples d'éléments du modèle d'enseignement

5.1 Situations prospectives

Exemple en calcul différentiel

Exemple en probabilités et statistiques

5.2 Activités d'exploration et formalisation

Exemple en probabilité géométrique

Exemple en calcul différentiel et intégral

Exemple en statistiques

5.3 Problèmes synthèse intra-cours

Exemple liant probabilité et progression arithmétique

Exemple liant dérivée et intégrale

5.4 Problèmes synthèse inter-cours

Exemple liant polynôme, calcul intégral et probabilité

Exemple liant géométrie analytique, calcul intégral et probabilité

5.5 Un exemple élaboré d'illustration du modèle

6. Suites du projet

6.1 Le matériel didactique

6.2 L'évaluation

6.3 L'aide à l'apprentissage

6.4 Les nouvelles technologies

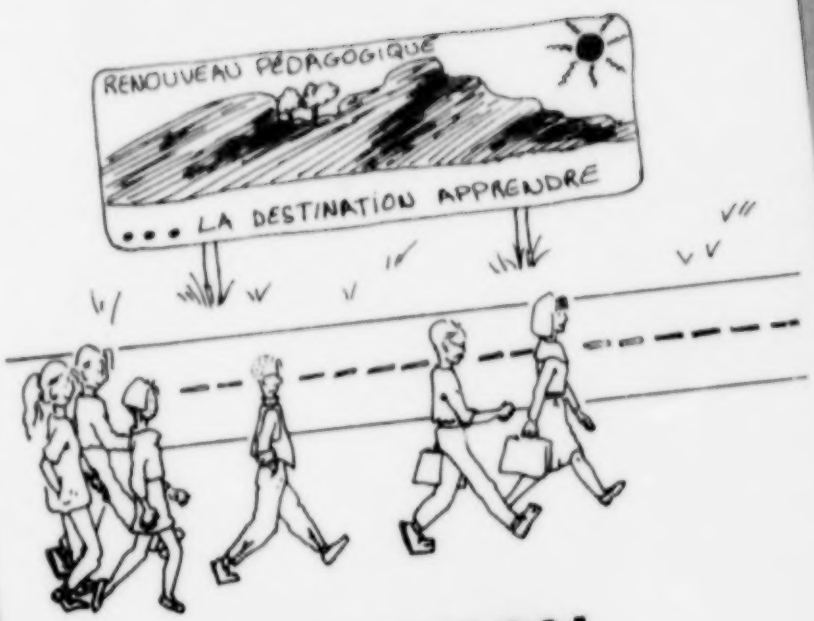
6.5 Recherche en apprentissage et enseignement des mathématiques

7. Bibliographie

1

INTRODUCTION

1



INTRODUCTION

1. INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, le monde de l'enseignement des mathématiques a été marqué de plusieurs réformes. On a assisté au mouvement des "mathématiques modernes" des années 60, à celui "back to basics" des années 70 et à l'approche par résolution de problèmes des années 80. Maintenant, on voit poindre à l'horizon les germes d'un renouveau pédagogique prônant un enseignement plus significatif et davantage centré sur l'apprenant, visant une meilleure compréhension et une meilleure utilisation des mathématiques. En toile de fond, on devine aussi un désir d'améliorer les processus d'apprentissage et de favoriser une actualisation et une conscientisation de ces processus afin de permettre une meilleure autonomie intellectuelle de l'apprenant. En bref, on ne se contente plus d'une "tête bien pleine" ou d'une "tête bien faite", mais encore veut-on une "tête qui fonctionne bien"... et qui sait pourquoi!

Pour comprendre les motifs sous-jacents à cette nouvelle orientation, prenons un certain recul. Depuis fort longtemps, les mathématiques se sont ouvertes au monde des applications. Elles ont des liens avec les sciences dites exactes: la physique (leur alliée traditionnelle), la chimie, la biologie (maintenant plus de 50% des revues de ce domaine sont à saveur statistique), l'informatique (à l'origine, la conception des ordinateurs a été purement mathématique). Mais elles ont aussi étendu leur influence aux sciences humaines, en particulier grâce à la statistique. Elles ont également rejoint tout citoyen dans sa vie de tous les jours. Les transactions monétaires quotidiennes, l'application des lois fiscales, la lecture de journaux criblés de statistiques et de graphiques, l'assimilation de politiques basées sur des arguments scientifiques, la compréhension de certains événements liés au hasard et la perception bidimensionnelle et tridimensionnelle sont autant d'éléments qui gravitent dans sa sphère d'activités. En fait, on est constamment entouré de situations mathématiques et régulièrement sollicité à prendre des décisions d'ordre mathématique. Ces décisions requièrent le sens du nombre, des habitudes d'estimation, des habiletés en algèbre, des connaissances en géométrie et des facilités en probabilités et en statistiques. Une carence au plan des connaissances mathématiques devient de plus en plus un handicap majeur.

Dans la dernière décennie, on a assisté à une véritable prolifération des mathématiques. La puissance d'abstraction et de modélisation des mathématiques combinée aux innovations technologiques a permis, dans de nombreux domaines, la création de nouvelles applications jusque là insoupçonnées. D'ailleurs, la technologie est en train de remodeler également le visage de l'enseignement des mathématiques. Les calculatrices et les ordinateurs sont devenus omniprésents et vont constamment devenir plus utiles et plus faciles à utiliser. Présentement, il y a des calculatrices à 100$ qui peuvent accomplir la majeure partie de la manipulation symbolique mathématique enseignée entre la maternelle et l'université. Ces machines peuvent faire de l'arithmétique avec des nombres entiers, rationnels ou complexes et avec des vecteurs. Elles peuvent résoudre des systèmes d'équations, faire des graphiques de fonctions (incluant des agrandissements successifs d'une certaine portion du graphique), avaler des masses de données numériques et les digérer grâce aux diverses fonctions statistiques intégrées. Ces machines peuvent aussi effectuer des dérivées formelles, de l'intégration de fonctions et de la manipulation matricielle.

1. Introduction

Cela signifie-t-il que les élèves n'ont plus besoin d'apprendre l'arithmétique, l'algèbre, le calcul ou les statistiques? Bien sûr que non! Avoir des connaissances en mathématiques est plus important que jamais. Il est tout de même de bon aloi de s'interroger sur la pertinence de certains contenus notionnels et de certaines habiletés qui ont été reconnus utiles dans le passé. Le temps à l'éducation en milieu scolaire est restreint et commande un choix judicieux des contenus.

En fait, la meilleure interface entre les mathématiques et la machine sera toujours l'être humain. C'est pour cela qu'il faudra toujours cultiver de bonnes connaissances en mathématiques chez l'élève sinon l'utilisation des moyens technologiques s'opérera sans compréhension. De plus, les éléments de connaissances doivent être maîtrisés et compris en profondeur afin d'être utilisés à un niveau organisationnel plus élevé. En ce qui concerne les sujets d'enseignement retenus, on devra réévaluer les habiletés régissant l'utilisation de ces sujets. Il faut être capable de relier nos habiletés mathématiques à notre environnement afin de pouvoir résoudre des problèmes individuels ou collectifs. En mathématiques, ces capacités regroupent l'identification, la formulation, la structuration de problèmes, les stratégies de résolution, la modélisation, la simulation ainsi qu'une utilisation intelligente et efficace des connaissances et des outils technologiques disponibles. La manipulation symbolique peut bien être faite par des machines mais des habiletés de pensée de haut niveau et l'habileté à communiquer intelligemment relativement aux situations mathématiques sont encore propres aux êtres humains.

L'école aura à refléter ces dimensions. Somme toute, les développements technologiques rapides influencent la façon dont nous enseignons les mathématiques parce qu'ils suggèrent une modification des buts poursuivis et des objets d'apprentissage et fournissent de nouveaux outils avec lesquels nous pouvons atteindre plus facilement ces buts. Sous ces influences, la mission de l'école change graduellement. Cette mission peut être analysée à l'intérieur de la dichotomie "processus de l'apprentissage versus produit de l'apprentissage". Un certain modèle d'éducation issu de l'époque industrielle mettait l'accent sur la transmission et la compartimentation des connaissances, sur le "produit". Inévitablement, la surabondance de l'information et les besoins de la société (entre autres, en termes de formation continue) déplaceront d'une certaine façon l'accent vers le "processus". Nous y voyons là une mise en garde des cours dits "sur mesure". Si nous n'aidons pas nos élèves à développer et à améliorer leurs processus d'apprentissage et à en prendre conscience, l'accumulation d'information, trait caractéristique de la société de demain, n'aura que peu de valeur.

Contrairement aux grandes réformes pédagogiques du passé, la présente réforme en mathématiques s'accompagne d'une révolution technologique et devient tout simplement incontournable. En effet, on n'avait jamais vu un changement sur le plan de la technologie élever à un tel niveau la nécessité de connaître et de comprendre autant de mathématiques. Jamais auparavant, la technologie n'avait autant remis en question le type de mathématiques apprises par toute une génération d'individus.

1. Introduction

La révolution technologique et ses implications sont des faits établis. Un urgent changement dans l'enseignement des mathématiques est requis, non pas parce qu'il y a eu une détérioration récente de cet enseignement mais parce que le monde a changé. Dans ce monde, les mathématiques sont appelées à jouer un rôle important dans maints domaines. La recherche d'énergie, l'exploration spatiale, l'étude des épidémies, la bio-éthique, l'écologie, la production de biens, l'agriculture et de manière générale, la science et la technologie dépendent de plus en plus des mathématiques. Les gens qui devront comprendre et résoudre les problèmes du futur, ou encore qui devront comprendre ou évaluer leurs solutions, doivent avoir une bien meilleure préparation en mathématiques qu'actuellement. Les réformateurs disparaîtront alors que les réformes qui prennent place sont appelées à rester car leur source se retrouve dans la société elle-même. Les gens qui croient la maxime "Si c'était assez bon pour moi, alors c'est assez bon pour mes enfants" vont vivre de cruelles désillusions.

Dans cette section, nous vous proposons un regard sur certaines conceptions de notre discipline, nous analysons certaines anomalies liées à l'apprentissage des mathématiques, nous touchons aux motivations profondes d'un changement dans nos pratiques d'enseignement et nous terminons en exposant la problématique et les buts poursuivis par ce projet. La nomenclature des objectifs mise en parallèle avec les constituantes de la table des matières vous permettront de mieux comprendre la structure globale de ce document.

En conclusion, il y a actuellement un défi énorme qui s'adresse à l'enseignant de mathématiques du collégial. Nous espérons que vous trouverez dans cet exposé des éléments qui pourraient constituer des perspectives nouvelles, des voies de solution ou à tout le moins qui devraient susciter une remise en question et une réflexion prometteuses. Modestement, c'est ce que vise le PROJET MATHÉTACTIQUES.

1. Introduction

1.1 Conceptions de l'activité mathématique

Dans les années 60 eut lieu la réforme qui introduisit ce qui fut appelé les "mathématiques modernes". Le caractère axiomatique, déductif et abstrait des mathématiques a prédominé. Une vision structuraliste et formaliste des mathématiques fut favorisée alors qu'une approche empirique, heuristique, intuitive et constructive fut négligée. La forme, la rigueur et la précision du langage transcendait régulièrement le sens des apprentissages. Comme étudiant ou enseignant, cette réforme a été vécue par la majorité des actuels enseignants de mathématiques du collégial. À divers degrés, son influence est encore présente dans le milieu. Pourtant, l'évolution des mathématiques comportait des événements dont la lecture indiquait une direction différente à celle empruntée par la réforme des mathématiques modernes.

Il faut d'abord noter que cette réforme correspondait parfaitement aux modèles formalistes relatifs à la vision des mathématiques du 19ième siècle. D'ailleurs, ces modèles commencèrent à s'effriter au 20ième siècle lors de la période connue comme étant "La crise des fondations des mathématiques". On cherchait alors à établir les mathématiques sur des assises solides, ce qui fut peine perdue.

> L'édifice mathématique paraissait rupturé, éparpillé: au lieu d'un fondement unique sur lequel on aurait pu l'asseoir, on avait plutôt obtenu une collection de bases partielles, chacune ne pouvant assurer qu'un morceau de l'ensemble. (Dionne, 1988)

La réforme des "maths modernes" fut ainsi en grande partie mise de l'avant en raison du modèle rationnel. Dans ce modèle, on y affirme le caractère *a priori* des mathématiques en mettant l'accent sur le rôle de l'esprit comme un producteur de vérités absolues. On y percevait les entités mathématiques comme faisant partie d'un monde abstrait et indépendant, uniquement accessible par la raison. Les caractéristiques dominantes des mathématiques devenaient alors l'axiomatique, l'aspect formel et logico-déductif.

Il est étonnant de constater que ces caractéristiques aient été promues par la réforme des mathématiques modernes de 20 à 30 ans après que le modèle rationnel fut critiqué par Gödel dans son célèbre article *On formally undecidable sentences of Principia Mathematica and related systems* de 1931. Gödel conclut que tout formalisme visant à exprimer l'axiomatisation de la théorie des nombres est incomplet, que les mathématiques ne peuvent admettre de formalisation absolue et que les parties que l'on peut formaliser ne sont pas à l'abri de l'inconsistance. Cela brisa l'image d'un système clos et absolu et la prétention des rationalistes d'expliquer toute réalité au moyen de la raison. Ce résultat aurait dû susciter davantage de considération au rôle réservé à l'intuition et à l'expérience en mathématiques.

Parallèlement à l'évolution des mathématiques, son utilisation en sciences permit le développement de différentes théories en astronomie, en mécanique, en optique et en hydrodynamique qui étaient remarquablement en accord avec l'expérimentation. Par les mathématiques, l'homme avait une emprise sur la nature, produisant une compréhension remplaçant le mystère par la loi et l'ordre. Les secrets de l'univers prirent ainsi la forme de lois mathématiques.

1. Introduction

Par ailleurs, ébranlant l'aspect absolu des mathématiques, plusieurs géométries de l'espace fort différentes virent le jour au 19 ième siècle. Toutes ne pouvaient être "vraies". Ainsi, la nature ne semblait pas avoir été conçue de manière mathématique. La clef de la réalité venait d'être perdue. La nature est complexe. Malgré le succès relatif des mathématiques à la modéliser, il fallut se rappeler qu'elles n'en construisent que des approximations.

L'être humain est, par définition, "un chercheur de structures", il est en perpétuelle construction. Le développement des mathématiques répond à cette quête de structures, à cette recherche de l'absolu. Aussi, cette remise en question de la validité de nos connaissances, du pouvoir des mathématiques de nous livrer les secrets d'une vérité absolue a créé un profonde déception et une réaction des milieux mathématiques admirablement bien décrite par Dionne (1988):

> De ces échecs et désenchantements a émergé une doctrine formaliste renouvelée, doctrine parfois qualifiée de "néo-formalisme" (Dionne, 1982a et b) pour la distinguer du formalisme défini par Hilbert. Ce "néo-formalisme" qui, au niveau philosophique du moins, a depuis lors dominé l'univers des mathématiques doit se comprendre comme une tentative de réunification de l'édifice mathématique autour de l'aspect logico-déductif auquel il assimile la discipline : pour arriver à cette unité nouvelle, le formalisme d'aujourd'hui élimine, en les reléguant dans le monde méta-mathématique ou extra-mathématique, tous les aspects suggestifs, ce qui touche l'acte de connaissance, de création ou de découverte, les questions d'interprétation, de signification et de vérité, pour faire de la mathématique la science de la déduction formelle. Il n'y a donc plus, à l'intérieur de la discipline, plusieurs interprétations possibles, plusieurs vérités, puisqu'on y conserve que la méthode logico-déductive et des objets mathématiques dont seule la structure formelle importe: bien sûr, parle-t-on encore de construction mathématique mais l'expression devient statique: il s'agit de l'objet structuré, achevé, par opposition au terme construction entendu dans le sens dynamique de construire.

Cette vision des mathématiques permet de récupérer une forme d'objectivité mais, d'autre part, relègue au second plan l'idée que les mathématiques sont le fruit d'une démarche humaine alimentée par l'intuition et le sens porté aux éléments rencontrés ou produits dans cette démarche. Toute trace de l'acte de connaissance est disparue pour n'en montrer que le produit fini, aseptisé. Même si les mathématiques sont des créations humaines, l'aspect subjectif de ces créations est régulièrement ignoré. Burton (D'Amour, 1988) nous offre une analyse fort pertinente de cette situation:

> Il semble qu'il existe deux mondes de la mathématique: l'un privé, l'autre public. Dans le monde privé dominent la lutte, l'échec, l'incompréhension, l'intuition, la créativité. Ce monde a été magnifiquement décrit par Poincarré et Hadamard. Le monde public est celui où apparaissent les résultats des efforts accomplis dans le monde privé; ces résultats sont formulés dans un style par convention formel et abstrait, d'où toute trace de fausses pistes, de raisonnements inadéquats ou de conceptions erronées a été

> éliminés. Malheureusement pour nos élèves, on ne leur donne accès qu'au monde public, dans les pages des manuels qui présentent la connaissance comme quelque chose d'inerte, comme s'il en avait toujours été ainsi. Leurs tentatives pour comprendre et leurs échecs deviennent alors une affaire personnelle - ce sont elles qui ne comprennent pas - plutôt qu'une participation au processus inhérent au développement continu de la mathématique.

Ici, il faut comprendre que l'aspect privé est le coeur de l'acte de connaissance où s'opère la découverte, la création. D'autre part, l'aspect public est ce que qualifie Dionne de "logique de deuxième temps". Là, on met en place les éléments un peu épars de la démarche en leur donnant une forme plus rigoureuse qui facilite à la fois sa communication et sa validation (par soi-même et par les autres). Cette validation s'opère selon des règles convenues dans le néo-formalisme, hors des résultats de Gödel. Nous récupérons là le sens de l'unité tant souhaitée dans la discipline: arriver à des conclusions "inattaquables" s'élevant au-dessus des opinions en éliminant tous les aspects subjectifs. Malheureusement, dans ce désir d'unité de l'univers mathématique, on a exagéré l'aspect objectif et on a dû sacrifier l'aspect privé des mathématiques en laissant une image peu fidèle du fonctionnement de l'esprit humain dans notre discipline.

Selon une analyse pertinente de Byers, plusieurs des problèmes associés à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques découlent d'une conception formaliste/structuraliste des mathématiques, conception qui dévalorise l'expérience humaine et l'intuition. Au sujet de l'enseignement des mathématiques à l'ordre collégial aux États-Unis, il déclare (Steffe, 1990):

> L'élève est exposé à une vision formelle et épurée du sujet. Au cours des ans, toute trace de lutte et de controverse a été éliminée... le monde des mathématiques est... complètement intimidant. Et pourtant c'est ce même étudiant qui deviendra demain un enseignant de mathématiques.

René Thom (médaillé Fields en 1958) écrivit dans un article relatif au 2e Congrès International de l'Éducation Mathématique (CIEM) (Steffe, 1988):

> Le vrai problème que comporte l'enseignement des mathématiques n'est pas celui de la rigueur, mais le problème du développement de la signification, de l'"existence" d'objets mathématiques... c'est à cette tâche primordiale, d'actualiser cette "existence" dans le monde mental, que l'enseignement des mathématiques doit être dédié.

La plupart des enseignants ont une vision personnelle de leur discipline influencée par leur formation scolaire, leurs expériences professionnelles et personnelles et leurs lectures. Ces visions s'avèrent déterminantes dans le choix des méthodes pédagogiques qu'ils vont privilégier. Dit en d'autres mots, René Thom résume (Dionne, 1988):

> Qu'on le veuille ou non, toute pédagogie des mathématiques quelque peu cohérente s'appuie sur une philosophie des mathématiques.

1. Introduction

Il est vrai que la philosophie qu'adopte l'enseignant à l'égard de sa discipline va influencer profondément ses attitudes, ses comportements, la manière utilisée pour aborder la matière et essayer d'y faire accéder ses élèves. Mais cette philosophie, bien qu'influençant les manuels scolaires, les programmes, les pratiques pédagogiques, les moyens d'évaluation, fait rarement l'objet de débat dans la communauté. Les choix pédagogiques devraient pourtant être des choix discutés, conscients, réfléchis et axés sur la formation fondamentale.

Par ailleurs, l'émergence d'un contexte à dominance technologique (élaboré précédemment) nous semble particulièrement propice à une clarification des conceptions de l'enseignement des mathématiques. Selon nous, se limiter à l'aspect public des mathématiques est réducteur. Le formalisme, bien que nécessaire, ne peut constituer une fin à l'enseignement. La voie alternative réside dans l'aspect privé, l'idée que "faire des mathématiques" est une activité humaine courante et que la signification mathématique est résultante d'une telle activité. Donner des réponses correctes à des exercices de dérivées de fonctions algébriques est sans doute une performance utile mais ce n'est pas, en soi, une démonstration de savoir mathématique.

Le savoir mathématique ne comporte pas seulement un ensemble de faits devant être réactivés selon des besoins techniques mais concerne aussi l'habileté à attaquer de nouveaux problèmes, à produire de nouveaux résultats. Pour utiliser les termes de Piaget, c'est opérationnel plutôt que figuratif. L'enseignement des mathématiques devrait véhiculer une image plus réaliste des mathématiques en tenant compte de ces deux composantes (faits et habiletés). D'ailleurs, il y a une tendance dans les principaux rapports américains suggérant d'aborder cette situation à un niveau profond, de se poser des questions concernant la nature des mathématiques, de réfléchir à ce que signifie penser mathématiquement et ce que signifie s'engager dans une activité mathématique.

Si notre perception des mathématiques englobe des processus complexes de résolution qui exigent de la conceptualisation, de l'analyse, de l'utilisation d'heuristiques et de leur contrôle, alors de nouvelles composantes à l'apprentissage sont requises. Par le fait même, une meilleure adéquation entre cette conception de notre discipline et les processus d'apprentissage devra inévitablement passer par de meilleures connaissances des processus cognitifs.

1.2 État de l'enseignement des mathématiques

Plusieurs recherches indiquent que les enfants entrent à l'école avec un riche répertoire de stratégies de résolution de problèmes et d'algorithmes à base conceptuelle qu'ils ont développé eux-mêmes (Cobb, Wood & Yackel, 1990). Toutefois, conséquence de l'enseignement traditionnel dans les premières années, les enfants apprennent à se fier à des procédures rigides au détriment du développement de la signification. Les enfants peuvent suivre les règles prescrites mais ne donnent plus à leurs actions une signification ancrée aux concepts. Les activités d'apprentissage centrés sur des problèmes furent justement conçus pour fournir des situations dans lesquelles les développements conceptuels et procéduraux pourraient, idéalement, aller main dans la main. Malheureusement, ces activités ne sont pas suffisamment utilisés. Les capacités de conceptualisation et de résolution de problèmes que l'élève possède à l'entrée de l'école sont sous-exploitées et leur progression est freinée.

Quelques exemples révélateurs

Dans ce contexte, nous sommes régulièrement témoins de performances scolaires pauvres quand il est question de compréhension, de signification et d'utilisation des concepts. C'est ce phénomène que nous nous proposons d'étudier ici. Nous vous offrons quelques exemples instructifs pour illustrer notre propos. Nous n'avons pas la prétention d'offrir un portrait complet et exhaustif de l'enseignement des mathématiques. Par contre, les exemples choisis toucheront les divers ordres d'enseignement et seront révélateurs sous plus d'un aspect. Nous espérons qu'ils aideront à lever le voile sur le malaise profond qui atteint actuellement l'enseignement des mathématiques.

Ordre primaire

D'abord, voici des extraits d'une étude réalisée en Israël et rapportée par Nesher (1988). On a demandé à des enfants de 6e, 7e, 8e et 9e année de spécifier lequel des deux nombres suivants est le plus grand:

Cas I	0,4	vs	0,234
Cas II	0,4	vs	0,675

Dans le cas I, Jeremy a écrit que 0,234 est plus grand que 0,4 et dans le cas II, il pointe 0,675 comme étant le plus grand. Connaît-il l'ordre de grandeur des nombres décimaux? Comme ces données furent recueillies à partir d'entrevues individuelles, les enfants purent expliquer leurs choix. C'est ainsi que Jeremy déclara que le nombre le plus long (selon lui, le nombre ayant le plus grand nombre de chiffres après la virgule) est le plus grand nombre, calquant son raisonnement sur les nombres naturels. Avec sa méthode, il peut avoir raison comme il peut avoir tort, mais il ne sait pas pourquoi. D'autre part, Ruth a décidé dans les deux cas que 0,4 est le plus grand nombre, choisissant à chaque occasion le nombre le plus court. Son raisonnement est le suivant: "Les dixièmes sont plus gros que les millièmes. Ainsi, le nombre le plus court n'ayant que des dixièmes est le plus gros." Dans ce test, Ruth eut tout de même une bonne réponse. Il est intéressant de noter que 35% des élèves de 6e année en Israël qui ont complété le chapitre sur les nombres décimaux agissent comme Jeremy alors qu'environ 34% agissent comme Ruth. Fait encore plus troublant, alors que la fréquence d'utilisation de la "règle de Jeremy" décroît dans les classes supérieures, la "règle de Ruth" est plus persistante au point où environ 20% des élèves de 7e et de 8e année maintiennent cette règle.

Comment se fait-il que ces comportements durent si longtemps? Une des raisons est, dans la plupart des cas, que ces sujets ont seulement appris dans un mode formel au moyen du duo papier-crayon avec les conséquences que cela comporte. L'enfant ne peut juger par lui-même la vérité des énoncés et doit se rabattre sur l'opinion du professeur, ce qui ne règle aucunement son problème.

Si nous croyons que l'expérience de l'élève devrait l'aider à construire des règles plus élaborées que celles de Ruth ou Jeremy, alors cette expérience devrait être dirigée directement et uniquement sur les éléments discriminants qui posent un conflit avec ses acquis antérieurs. De plus, l'élève doit avoir l'opportunité de voir qu'il y a conflit. Cela ne peut être accompli par un enseignement verbal où l'enseignant transmet "la" vérité car les règles des élèves, souvent masquées, ne sont pas alors remises en cause. Les conceptions erronées vont persister si les enfants n'ont pas l'occasion d'expérimenter une réalité qui va confronter leurs croyances. Somme toute, on doit alors rechercher un environnement d'apprentissage où l'élève, de manière autonome, pourra tester la validité de ses apprentissages.

Cette étude de Nesher est symptomatique en soi. D'abord, parce qu'elle démontre que les pratiques utilisées dans cet apprentissage ont été infructueuses et devraient être remises en question. Ensuite, cela laisse planer un doute sur l'efficacité générale de ces pratiques. Doute entretenu par la publication des actes des différents colloques sur l'enseignement des mathématiques de la dernière décennie. Ces actes sont truffés d'exemples de conceptions erronées semblables à celui que l'on vient de commenter.

Ordre secondaire

Des enquêtes ont révélé que la moitié des élèves en Amérique du Nord ne peuvent résoudre des problèmes simples de pourcentage à la fin de leur huitième année. On peut supposer que la persistance de la "règle de Ruth" n'est pas étrangère à ces résultats médiocres. Chose certaine, la persistance et l'accumulation de certaines conceptions erronées est lourde de conséquences pour les apprentissages ultérieurs. Ces élèves de 8e année se voient rarement offrir la chance de bâtir ou de refaire les concepts fondamentaux. Certains s'en sortent, d'autres difficilement. Pour ces derniers, la pyramide des connaissances devient de plus en plus chambranlante... le décrochage des mathématiques les guette.

Par ailleurs, les auteurs du N.A.E.P. (National Assessment of Educational Progress) notent que seulement 6% des étudiants de 17 ans peuvent résoudre des problèmes à plusieurs étapes comportant de l'algèbre simple (Davis, Maher & Noddings, 1990). De tels résultats sont profondément décevants à la sortie de la décennie consacrée à la résolution de problèmes, telle que promue par le National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.). Ils ajoutent:

> La plupart des étudiants, même rendus à l'âge de 17 ans, ne possèdent pas la largeur de vue et la compétence dont ils ont besoin pour faire des études avancées en mathématiques à l'ordre secondaire.

Dans un article provocant de 1986, Brunkhorst et Yager décrivent la présente condition de l'enseignement des sciences. Citant des études faites par Miller, Suchner et Voelker, ils affirment que 90% de tous les gradués des écoles secondaires américaines n'ont pas atteint le caractère de la compétence scientifique ("scientific literacy"). Pire, le maigre 10% des élèves qui atteignent cette compétence le font en utilisant des attitudes et des moyens non reliés à l'enseignement qu'ils ont reçu. Les auteurs ajoutent que la science est trop spécialisée, trop singulière, trop abstraite, trop peu reliée au vécu de la plupart des élèves. (Blais, 1988)

Ordre collégial

À notre connaissance, des études en profondeur sur les performances en mathématiques des élèves québécois à l'ordre collégial n'ont pas encore été réalisées. Par ailleurs, notre expérience professionnelle nous porte à croire que la réalité québécoise doit se rapprocher de celle de nos voisins du sud. À ce sujet, le comité conjoint G.D.M. - MOIFEM (1989) dans ses travaux préparatifs aux États généraux de l'enseignement des mathématiques tenait les propos suivants:

> D'autre part, nous savons que la science et ses applications techniques modifient notre vie quotidienne dans plusieurs domaines. L'école en général et les programmes de mathématiques en particulier, se doivent d'intégrer ces changements, s'ils veulent continuer à jouer leur rôle dans la société. Or, des recherches constatent que l'objectif de procurer aux élèves, par l'apprentissage des mathématiques, des outils intellectuels utilisables dans diverses situations de la vie courante ou professionnelle, n'est que partiellement atteint: les élèves ont de la difficulté à mobiliser, à réinvestir ou encore à actualiser leurs savoirs et leurs savoir-faire dans des situations nouvelles.

Il y a tout de même un élément objectif qui mérite d'être commenté. En effet, les faibles résultats obtenus par des étudiants lors d'un récent prétest de mathématiques administré à leur arrivée à l'École Polytechnique nous apparaît révélateur et inquiétant (Vanderstraeten, Burney-Vincent, 1991). Ce prétest ne comportait pourtant que des notions jugées absolument indispensables et s'adressait, pour ainsi dire, à la crème de nos élèves en sciences.

Ordre universitaire

Maintenant, passons à un autre exemple, rapporté cette fois par Schoenfeld (Paul, 1990). À l'Université de Rochester, 85% des étudiants de première année suivent un cours de calcul différentiel et intégral. À cette occasion, environ la moitié des étudiants font leur dernier cours de mathématiques. Ils complètent leurs études en ayant l'impression de connaître des mathématiques très sophistiquées et très puissantes. Ils peuvent trouver le maximum d'une fonction compliquée, calculer des volumes de solides de révolution et ainsi de suite. Mais, selon Schoenfeld, ils ne savent pratiquement rien. La seule raison qui explique leur succès à l'examen final est que les problèmes de l'examen final sont pratiquement des copies-carbone des problèmes qu'ils ont vu auparavant. On ne demande pas aux étudiants de penser mais simplement d'appliquer des procédures établies pour des tâches spécifiques. Schoenfeld et un collaborateur ont étudié les habiletés de ces étudiants en regard de problèmes élémentaires rencontrés dans les cours pré-calcul. Un de ces problèmes est le suivant:

1. Introduction

> Une clôture de 8 pieds de haut est située à 3 pieds d'un édifice. Exprimer la longueur L d'une échelle inclinée dont le sommet touche le sommet de la clôture en fonction de la distance D entre le pied de l'échelle et la base de l'édifice.

Les résultats sont à l'effet que 19 des 120 tentatives de résolution de ce problème ont résulté en des réponses correctes alors que seulement 65 étudiants ont réussi à fournir une réponse. La douloureuse réalité est que trop d'élèves quittent un cours avec un méli-mélo de connaissances fragmentaires. Tout cela après qu'ils eurent oublié la majeure partie de ce qu'ils avaient réussi à entasser dans leur mémoire à court terme pour réussir leurs examens. Ils saisissent trop peu souvent la logique de ce qu'ils ont appris. Ils relient rarement ce qu'ils ont appris à leur propre expérience. Ils se demandent rarement: "Pourquoi est-ce comme cela? Quelle est la relation entre ce concept et ce que j'apprends? Comment cela est-il relié à ce que j'apprends dans mes autres cours?" En résumé, très peu d'élèves savent ce que signifie organiser rationnellement ce qu'ils apprennent.

Schoenfeld a démontré que l'apprentissage de bas niveau ("low-order") domine actuellement l'éducation et cela même en mathématiques, discipline réputée pour ses apprentissages basés sur la réflexion. La plupart des élèves sont bien loin de penser mathématiquement. L'enseignement semble si inefficace à atteindre ce but que Schoenfeld conclut:

> Trop souvent nous nous concentrons sur un ensemble réduit de tâches définies et exerçons les élèves à exécuter ces tâches de manière routinière, voire algorithmique. Ensuite, nous évaluons les étudiants selon des tâches qui sont très proches de celles que nous avons enseignées. S'ils ont du succès avec ces problèmes, tous se félicitent d'avoir appris des techniques mathématiques puissantes. En fait, ils peuvent utiliser de telles techniques mécaniquement tout en manquant d'habiletés rudimentaires de réflexion. Se faire croire et laisser croire qu'ils "comprennent" les mathématiques est décevant et frauduleux.

Les exemples précédents illustrent certaines lacunes dans l'enseignement des mathématiques. Nous y voyons le besoin d'établir des assises plus efficaces de l'enseignement des mathématiques dans nos institutions scolaires. Pour cela, il faudrait, au départ, localiser les sources de tous ces problèmes. Comme le passé est souvent garant du présent, nous sommes d'avis qu'il faudrait regarder du côté des théories de l'apprentissage qui ont marqué la scène de l'enseignement des mathématiques au cours des dernières décennies. Or, de toutes les théories de l'apprentissage, ce sont très certainement celles d'inspiration behavioriste qui ont le plus fortement influencé toute l'éducation en Amérique du Nord et tout particulièrement l'enseignement des mathématiques.

Le behaviorisme

De la publication de Thorndike *The psychology of arithmetic* en 1922 à *The condition of learning* de Gagné en 1965, les enseignants de mathématiques ont utilisé des principes tirés du behaviorisme. Cette influence fut reconnue par plusieurs auteurs et confirmée par une grande majorité de rapports d'étude (rapports nationaux du CIEM (1979) pour le compte de l'UNESCO, rapports du NACOME (1975) ou du N.A.E.P.O. (1981) aux États-Unis ou celui du Conseil des Sciences du Canada (1977)) (Dionne, 1988). Nous allons tenter de décrire les grandes lignes du behaviorisme. Cette description, forcément incomplète, sera tout de même utile puisqu'elle permettra de situer certaines pratiques traditionnelles de notre milieu.

Les stratégies behavioristes font référence à un ensemble d'approches basées sur des principes psychologiques d'apprentissage dont le but est de changer le comportement humain. Cette théorie a ses origines dans les expériences classiques de Pavlov sur le conditionnement (réalisées en 1927) et les expériences de Thorndike sur l'apprentissage avec récompense au début du siècle. C'est néanmoins John B. Watson (1878-1958) qui est généralement reconnu comme le père du behaviorisme. Dans les trente dernières années, cette théorie a été systématiquement appliquée dans les écoles. Ce sont les travaux de Skinner et Wolpe, dans les années 50, qui ont donné un élan majeur à ce mouvement et c'est à partir ce ces travaux qu'a été mise au point la technique d'enseignement programmé qui remporta un vif succès dans les années 60.

Les behavioristes croient que des forces externes dans l'environnement expliquent la connaissance de certaines personnes. En d'autres mots, on considère la connaissance d'une personne comme une résultante de l'influence de son milieu. De ce point de vue, les implications pour l'enseignement sont énormes. Si l'enseignement peut régulariser les forces de l'environnement qui donnent lieu au comportement de l'élève, alors il faut modeler ces forces de telle sorte que l'apprentissage soit amélioré. En détails, voyons comment s'opère cette acquisition de comportements.

En présence d'un certain stimulus extérieur, le sujet émet une réponse qui reçoit un renforcement de l'environnement. Dépendant de la justesse de la réponse, le renforcement est soit positif (récompense) ou négatif (punition). La répétition du renforcement devrait faire qu'en présence du même stimulus, la bonne réponse sera reproduite. Par exemple, les élèves de 1ière année apprennent à former des lettres avec la consigne de les copier (stimulus). Avec certains efforts, ils parviennent à une certaine approximation de la lettre (réponse). L'enseignant approuve ou désapprouve l'élève pour son "produit" (renforcement). Au fil des semaines, l'enseignant renforcera seulement les réponses se rapprochant de plus en plus de la performance cherchée: c'est le modelage ("shaping"). De cette manière, le comportement est graduellement contrôlé par le choix de stimuli particuliers.

Il est clair que la répétition de la séquence "stimulus-réponse-renforcement" est un élément déterminant de cette théorie. Les exercices de style "drill and practice" en sont des exemples. On présume que la répétition d'actions dans un contexte donné permettra une certaine transférabilité des connaissances. En effet, lorsque des situations nouvelles sont abordées, le sujet a la possibilité d'y reconnaître des éléments qu'il a maîtrisés antérieurement et d'y appliquer les réponses qui, dans le passé, ont reçu un renforcement positif.

D'autre part, dans le contexte behavioriste, faire une erreur équivaut à fournir une mauvaise réponse à un stimulus donné. Cette mauvaise réponse indique que l'apprentissage n'est pas complété. Il faut donc répéter la séquence "stimulus-réponse-renforcement" afin de la rectifier. Skinner et ses collaborateurs ont montré qu'un apprentissage comportant peu d'erreurs était possible en modelant le comportement de l'apprenant par le biais de petites approximations successives. Cela mène à un style d'enseignement consistant à organiser l'apprentissage dans des séquences soigneusement préparées au moyen desquelles l'individu acquiert graduellement les éléments d'une performance nouvelle et complexe. Tout cela peut se faire en minimisant le nombre de fausses réponses. Dans les écoles, c'est devenu l'enseignement programmé où l'élève peut être mené pas à pas jusqu'à l'atteinte d'objectifs comportementaux particuliers.

Dans cette pédagogie, le rôle de l'élève est plutôt passif quoique rationnel. Il se fie à l'environnement pour lui fournir les stimuli et les renforcements nécessaires: c'est du professeur qu'il "reçoit" des connaissances produites hors de son contrôle. Par ailleurs, le rôle du professeur est très actif et très exigeant: c'est lui qui doit bâtir l'environnement. Il doit structurer la matière, la décomposer en petites unités, la traduire en stimuli, puis fournir les renforcements appropriés. Il amorce et entretient toute la démarche d'apprentissage.

Puisque les behavioristes définissent l'apprentissage comme un changement dans le comportement de l'apprenant, il est donc important que ces comportements soient observables et mesurables. On décrira alors les éléments de contenu en termes de buts, d'objectifs généraux, terminaux, intermédiaires. Bref, les connaissances à atteindre seront organisées de manière hiérarchique selon le plan organisationnel de ces dernières. En somme, l'atteinte de ces objectifs devient une validation de l'efficacité de ces apprentissages. L'évaluation (qu'on qualifie alors de critériée) s'en trouve facilitée. C'est d'ailleurs des bulletins de type critérié que la plupart des enfants reçoivent à l'école. Ils constituent un outil de communication pertinent (pour l'enfant et le parent) relatif à certaines dimensions de l'apprentissage.

Ajoutons que, selon Skinner, toute attention portée aux structures mentales est inopportune. Dans le dilemme de l'apprentissage "processus versus produit", il prend clairement position: c'est le "produit" (le comportement, la performance) qui compte et qui nous fournit de l'information sur l'efficacité de l'apprentissage. Pour lui, c'est la seule réalité de l'apprentissage. Les mécanismes mentaux au moyen desquels les connaissances sont acquises sont enfermés dans une "boîte noire" qu'on ne veut pas ouvrir. On se contente d'en provoquer le fonctionnement et de juger de ce fonctionnement en observant les réponses fournies aux différents stimuli.

Faiblesses du behaviorisme

Il y a 10 ou 15 ans, il était moins préoccupant, pour les milieux de l'éducation, de parler de théories de la connaissance. Les enseignants, influencés par le behaviorisme, étaient préoccupés à mettre les connaissances dans la tête des élèves et les chercheurs en éducation s'attardaient à trouver les meilleures façons d'y parvenir. On se préoccupait moins du type de savoir que devait acquérir l'élève et il n'y avait aucun doute que, d'une manière ou d'une autre, tout savoir pouvait être transmis par le professeur. Le seul souci consistait à trouver le meilleur moyen d'améliorer ce transfert. Les chercheurs en éducation avec leurs tests critériés et leurs méthodes statistiques sophistiquées étaient pour y apporter la réponse définitive. Les choses ne se passèrent pas comme prévu. Il y a maintenant une vive déception qui dépasse le seul enseignement des mathématiques et qui implique virtuellement l'enseignement et les méthodes didactiques dans toutes les disciplines.

Bien que le behaviorisme soit, sous plusieurs formes, un modèle adéquat pour divers types d'apprentissage (particulièrement l'apprentissage d'habiletés techniques ou algorithmiques), il est totalement inadéquat à expliquer comment une personne découvre une relation, prouve un théorème ou résout des problèmes complexes. La pratique répétée et le renforcement ne peuvent faire de quelqu'un un mathématicien créatif; elle ne suscite pas l'émergence de nouvelles idées. Apprendre ne se traduit pas par un simple changement au niveau de la performance et l'accroissement du nombre de bonnes réponses dans des tests critériés ne nous assure pas non plus une amélioration parallèle dans les façons de réfléchir à un problème.

Finalement, rappelons que les comportements voulus doivent être observables et mesurables. Les objectifs d'apprentissage doivent traduire le plus fidèlement possible ces comportements. En cohérence avec ce qui précède, on peut lire les lignes directrices de l'enseignement rattaché à ces objectifs. Or, l'approche behavioriste engendre souvent un enseignement discontinu, sans compréhension globale ni signification profonde. L'accent est alors mis sur les connaissances ou habiletés ponctuelles, seuls éléments que l'on peut vraiment traduire en termes de comportements observables.

À ce sujet, Forbes avait fait un judicieux commentaire: limiter l'enseignement à des objectifs de comportement de type behavioriste revient à limiter l'enseignement à la mécanique des mathématiques. Aux États-Unis, c'est cette vision "mécanique" des mathématiques qui, malheureusement, a primé. Cette vision s'est traduite dans la construction de tests standardisés nationaux. L'efficacité visée à ces tests en est venue à dominer complètement l'enseignement. C'est pourquoi des professeurs disent souvent qu'ils n'ont pas de temps en classe pour de l'exploration, de la découverte ou de la résolution de problèmes. Pendant ce temps, le style de questions permet à des ordinateurs d'obtenir d'excellentes notes à ces tests! Ici, bien qu'ayant moins d'ampleur, ce phénomène se produit également à l'ordre secondaire. Nous constatons alors que le contrat didactique emprunte une courbe dangereuse où l'enseignant devient de plus en plus explicite concernant les comportements cherchés et l'élève devient de plus en plus mécanique dans l'accomplissement de ces comportements. Cette situation constitue une mise en garde à l'ordre collégial afin que les mêmes erreurs ne soient pas reproduites car toute cette pratique en est venue à dénaturer complètement l'enseignement des mathématiques et cause un tort considérable à cette discipline.

Quelques traces du behaviorisme

Bien sûr, on ne retrouve pas le behaviorisme dans nos classes sous une forme intégrale. L'enseignement programmé a été relégué aux oubliettes depuis un bon moment. Il persiste tout de même de nombreuses influences du behaviorisme: certaines souhaitables, d'autres pas. Quelques traces du behaviorisme se traduisent quelquefois par la perception du professeur comme un dispensateur de savoir et par la primauté accordée à la stricte acquisition de connaissances. À divers degrés, ces deux facteurs se conjuguent pour faire en sorte que l'enseignement magistral persiste dans nos pratiques pédagogiques.

D'ailleurs, les constatations faites à travers l'observation de 200 000 heures d'enseignement dans 42 états des États-Unis et 7 autres pays sont à l'effet qu'en général c'est l'enseignant qui garde la parole pendant 80% du temps, et que, sur le plan des opérations intellectuelles, on ne sollicite chez les élèves une activité dépassant la simple mémorisation que pour environ 10% du temps (Aylwin, 1990). Ce type d'enseignement, comme le déplore le comité G.D.M.-MOIFEM (1989) dans un document de travail, n'est sûrement pas approprié pour tous.

> Par ailleurs, certaines stratégies pédagogiques sont plus "à la mode" dans le système scolaire actuel, notamment les présentations de type magistral où c'est la pensée verbale et analytique qui est la plus sollicitée. La conséquence en est que certains élèves, disposant de modes différents d'appréhension, seront plus ou moins consciemment laissés pour compte et développeront une image d'eux-mêmes qui sera défaitiste et qui handicapera la majorité de leurs apprentissages ultérieurs.

Les chercheurs de la "Second International Study of Mathematics" ont trouvé que l'enseignement actuel des mathématiques, presqu'universellement, peut être caractérisé comme formel, comportant des présentations symboliques de type magistral de règles ou de procédures mathématiques. (Steffe, 1990) Certains enseignants présentent les mathématiques comme statiques et consistant en des procédures routinières. Résoudre un système d'équations linéaires, par exemple, peut être présenté comme une séquence d'étapes qui, lorsque bien suivies, nous fournit une réponse correcte. Bien que de telles connaissances procédurales soient requises, un enseignement qui commence et qui finit là est à éviter.

L'apprentissage ne serait pas alors basé sur l'expérience de l'élève ni sur son intuition ou sa pénétration du sujet. D'ailleurs, on croit de plus en plus que les difficultés des enfants dans l'apprentissage des mathématiques scolaires découlent en grande partie de l'incapacité à reconnaître et à utiliser des relations entre des règles formelles apprises à l'école et leurs propres intuitions mathématiques développées indépendamment. En fait, des recherches en apprentissage de l'algèbre ont montré que lorsqu'ils réfléchissent à des règles de transformation, les élèves font rarement référence à des relations d'ordre quantitatif ou à des situations de problèmes qui pourraient donner une signification à des expressions algébriques. Il n'est donc pas surprenant de voir que les élèves ne sont pas très habiles avec le processus de mathématisation à savoir, construire des liens entre des expressions algébriques formelles et les situations auxquelles elles se réfèrent (Resnick, 1988). D'ailleurs, selon Resnick, des recherches en ce domaine constituent une priorité majeure.

Tout cela indique que la présente éducation mathématique n'implique pas adéquatement les capacités de l'élève dans l'interprétation et la construction de sens ou de signification. Cette conclusion est appuyée par des données de tests nationaux (National Assessment of Educational Progress, 1983) qui montrent le déclin des habiletés de l'élève en résolution de problèmes même si les habiletés de calcul augmentent. En résumé, la plupart des élèves apprennent les mathématiques comme une habileté routinière, ils ne développent pas des habiletés de haut niveau afin d'organiser et d'interpréter l'information. On est donc encore bien loin de la "tête qui fonctionne bien et qui sait pourquoi"!

1.3 Besoins de formation dans la société de demain

La société a vécu des transformations radicales au cours de la dernière décennie. D'abord, la technologie envahissante a provoqué une explosion d'information comme on en avait jamais vue auparavant. Les connaissances se multiplient à un rythme effarant et ne peuvent plus constituer l'unique point de mire de l'école. De plus, les changements technologiques pénètrent les milieux de travail, les milieux scolaires et nos vies quotidiennes. Pour ce qui est du marché du travail, il faut avoir à l'esprit que la mobilité des emplois sera une réalité préoccupante pour le citoyen de demain. D'ailleurs, l'extrait suivant tiré de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989) est éloquent concernant l'importance que devrait prendre cette dimension dans notre approche pédagogique.

> Les conseillers en main-d'oeuvre, conscients des changements rapides en technologie et des tendances du marché de l'emploi, affirment qu'en moyenne, le travailleur changera d'emploi au moins 4 ou 5 fois au cours des 25 prochaines années. Chacun de ces emplois exigera un perfectionnement relié aux habiletés de communication. Ainsi, une main-d'oeuvre souple, capable d'apprendre de manière continue est requise. Cela impliquera que les mathématiques de l'école doivent mettre l'accent sur une forme dynamique de compétence. L'approche par résolution de problèmes (qui inclut les façons dont les problèmes sont présentés, la signification du langage mathématique et les différentes manières de conjecturer et de raisonner) doit être centrale à l'enseignement. Les étudiants peuvent ainsi explorer, créer, s'adapter à des conditions changeantes et produire de manière active de nouvelles connaissances au cours de leur vie.

Les emplois de demain requerront donc des travailleurs ayant une pensée alerte, prêts à vivre et provoquer le changement, à absorber de nouvelles idées, à résoudre des problèmes complexes et non conventionnels. Comme l'a souligné le rapport Workforce 2000, ce sont ces besoins qui feront des mathématiques une nécessité pour tant d'emplois. Cette nécessité qui ne se limite pas aux seules connaissances, bien qu'elles soient fort importantes, englobe aussi les habiletés à utiliser ces connaissances dans diverses situations ou plus explicitement, les habiletés de résolution de problèmes. Pour rencontrer ce besoin, un ajustement au niveau pédagogique est sûrement requis. À ce sujet, le rapport *Educating Americans for the 21st century* est explicite.

Nous devons faire un retour aux éléments fondamentaux. Mais les éléments fondamentaux du 21e siècle ne sont plus seulement la lecture, l'écriture et l'arithmétique. Ces éléments comprennent aussi la communication, des habiletés de haut niveau de résolution de problèmes, une compétence technologique et scientifique. Ces nouvelles bases sont requises non seulement pour les scientifiques de demain, non seulement pour les êtres talentueux ou fortunés, non seulement pour les élèves pour lesquels l'excellence est une tradition sociale et économique mais pour tous les élèves. Tous les élèves ont besoin d'une bonne base en mathématiques, en sciences et en technologie.

De plus, les capacités d'apprentissage du citoyen de demain devront être meilleures que jamais. Cette génération de travailleurs devra apprendre plus et mieux que toutes les générations précédentes. Même hors du travail, la vie quotidienne sera marquée par le changement. On doit faire en sorte que l'école prépare l'élève à jouer un rôle actif dans ce type de société. Nous croyons que les mathématiques peuvent offrir un terrain d'apprentissage fort propice à l'éclosion des qualités requises dans le futur. Il y a des habiletés de résolution de problèmes qui nous semblent vitales et que l'on pense pouvoir développer mieux qu'ailleurs.

Mais, il y a plus que cela. Dans les institutions scolaires, il est souhaitable que chaque individu ait l'occasion d'améliorer ses processus d'apprentissage. À l'intérieur de ses apprentissages, rendons possible que l'élève examine des hypothèses, cherche activement des solutions, discute de ses approches avec ses pairs ou son professeur, analyse les concepts ou théories de son propre point de vue tout en entretenant une variété de points de vue, questionne activement le sens et les conséquences de ses démarches, relie les connaissances acquises à son vécu, attaque des problèmes non-routiniers ... Tout cela fait partie d'un apprentissage de haut niveau susceptible d'améliorer sa pensée critique. Ce type d'apprentissage est en opposition à celui de bas niveau ("low-order") où la mémorisation, les exercices répétitifs, la "couverture du contenu" et le rôle passif de l'élève dominent. Paul (1990) analyse avec acuité les besoins actuels d'un apprentissage de haut niveau.

> La reconnaissance des implications sociales, politiques et morales d'un apprentissage de bas niveau est grandissante à mesure que l'on s'aperçoit que les nations développées ou sous-développées font face à des problèmes qui ne peuvent être résolus sans une croissance intellectuelle significative d'une grande partie de leur population. Une telle croissance implique une pensée réfléchie et critique améliorée concernant des problèmes de l'environnement, les relations humaines, la surpopulation, les attentes accrues, les ressources diminuées, la compétition globale, les buts personnels et les conflits idéologiques.
>
> Ce problème ne pourra se régler hors de l'école car le commun des mortels est de plus en plus bombardé de diverses explications ou avis contradictoires. Manquant d'expérience sur le plan de la réflexion complexe et non rompue à la pensée critique, la personne ordinaire retraite face à la complexité et se rabat sur des images simplistes du monde...

> Si les écoles et les collèges ne cultivent pas un déplacement de la mémorisation à une pensée critique, il y a une mince possibilité que ce déplacement survienne de façon significative hors de l'école.
>
> Pour effectuer ce changement de cap, les professeurs doivent considérer un nouveau concept de savoir et d'apprentissage, plus réaliste et en accord avec le monde moderne, liant l'acquisition de savoir à une pensée dialectique permettant d'ajuster cette pensée à des changements accélérés, non fixée aux présentes croyances et qui ne soit pas facilement manipulée ou attirée par la propagande. Le fondement théorique lié à ce besoin et le moyen approprié pour le satisfaire recueillent actuellement une base de recherche solide. Son actualisation en milieu scolaire ne fait que commencer, son plein développement dans le monde entier s'effectuera probablement d'ici 10 à 25 ans.

Parallèlement, il faut aussi que chacun ait la chance de se voir penser, de s'analyser, de développer des éléments de contrôle de sa pensée, bref, d'apprendre à apprendre. On parle alors de métacognition. Les enseignants auront avantage à mieux connaître cette facette de l'apprentissage car ce sont eux qui devront modeler les environnements d'apprentissage afin d'y faire place. À l'état brut, la discipline mathématique se prête fort bien à la métacognition et à l'éclosion de la pensée critique. Les mathématiques sont des constructions humaines où la réflexion individuelle ou collective constitue le matériau premier. Là encore, des modifications appréciables s'avèrent nécessaires sur le plan pédagogique. Bien que la recherche en ce domaine n'en soit qu'à ses premiers pas, on peut tout de même privilégier une pédagogie qui ne soit pas incompatible avec ces éléments. Cette pédagogie, à définir, devrait valoriser l'apprentissage en tant qu'activité intellectuelle et viser une meilleure autonomie de l'élève. Somme toute, cette tâche est un réel défi, mais en réalité, avons-nous vraiment le choix?

1.4 Description de la problématique

À l'ordre collégial, l'enseignement des mathématiques accuse actuellement certaines faiblesses et une réorientation semble s'imposer.

- Cet enseignement ne met pas suffisamment l'accent sur les processus d'élaboration, sur la construction de signification et sur la transférabilité des connaissances.

- L'élève est trop souvent confiné au rôle de spectateur au lieu de celui de participant, en particulier lors de l'élaboration des concepts. Devant des mathématiques "toutes faites", l'élève peut ressentir un sentiment d'impuissance non favorable à l'éclosion de sa confiance. Il en résulte parfois un manque d'intérêt qui n'est pas étranger aux échecs de certains élèves.

- Dans le contexte actuel d'enseignement, il est difficile de montrer une image dynamique de notre discipline et d'en apprécier sa juste valeur. On en est venu à dénaturer les mathématiques et cela ne sert aucunement l'élève, au contraire.

- Dans la société d'information dans laquelle nous vivons, la communication joue un rôle de premier plan. Les stratégies de résolution de problèmes seront de plus en plus sollicitées comme plate-forme d'échanges autour de problèmes communs. L'école ne s'est pas encore fermement engagée dans ce rôle de soutien.

- L'apprentissage des mathématiques ne met pas suffisamment l'accent sur les processus d'apprentissage. L'école, dans une perspective de formation continue, doit aider l'élève à actualiser et à développer ces processus. Une amélioration et une conscientisation à ce sujet constituerait pourtant une contribution majeure de notre discipline à la formation fondamentale.

La société actuelle (influencée en partie par la venue des ordinateurs) nous envoie des messages pressants ouant à une réforme de l'école en regard de ses besoins. Ces messages n'ont pas encore reçu un écho suffisant en mathématiques. Nous croyons qu'une pédagogie offrant des environnements d'apprentissage propices aux activités d'exploration, à la construction des savoirs et faisant appel à diverses stratégies de résolution de problèmes a de bien meilleures chances d'atteindre des objectifs de haut niveau et de répondre aux attentes de la société. Malheureusement, au collégial, l'absence de sensibilisation et le manque de matériel didactique approprié ont provoqué une panne sèche dans tout mouvement de réforme en ce sens. Il est plus que temps que les enseignants du collégial soient éveillés à ces questions et puissent disposer de modèles d'outils pédagogiques requis pour opérer cette réforme. C'est cette mission que nous voulons amorcer par l'entremise du PROJET MATHÉTACTIQUES.

1.5 But et objectifs du projet

But

Promouvoir un renouveau pédagogique pour l'enseignement des mathématiques à l'ordre collégial en définissant une approche pédagogique liant résolution de problèmes et constructivisme.

Objectifs

- Susciter une réflexion sur la situation actuelle de l'enseignement des mathématiques en regard des conceptions de notre discipline, des innovations technologiques et des besoins de la société.
- Sensibiliser les enseignants de mathématiques du collégial à des pratiques pédagogiques nouvelles.
- Élaborer des lignes directrices pour l'utilisation d'une approche pédagogique respectant la philosophie constructiviste.
- Élaborer des lignes directrices pour l'utilisation d'une approche pédagogique par résolution de problèmes.
- Produire un modèle d'enseignement liant constructivisme et résolution de problèmes.
- Produire quelques exemples d'utilisation d'éléments de ce modèle.
- Identifier certaines difficultés liées à l'implantation du modèle.

2

LE CONSTRUCTIVISME

2. LE CONSTRUCTIVISME

2.1 Des origines à nos jours

Le pionnier du constructivisme fut le philosophe napolitain Giambattista Vico. Son traité *De antiquissima italorum sapientia* écrit en latin date de 1710 et demeura longtemps pratiquement inconnu. Sa maxime était "verum est ipsum factum", ce qui veut dire "la vérité est comme vous la faites". C'est une des idées de base de Vico: l'apprenant ne peut rien savoir sauf les structures cognitives qu'il a lui-même mises en place. Il l'exprima de plusieurs façons dont: "Dieu est l'artisan de la nature, l'homme est le dieu des artéfacts." Aussi, il dit que "savoir" signifie "savoir comment faire". Il expliqua qu'on ne connaît une chose que lorsqu'on peut en décrire les composantes qui la constituent. En conséquence, dans la perspective de Vico, seul Dieu peut connaître l'univers réel parce qu'il sait comment et avec quoi il l'a fait. Au contraire, l'être humain ne connaît seulement que ce qu'il a construit.

Le savoir n'est donc pas une chose inerte mais plutôt une conséquence des actes du sujet. Plus récemment, cette perspective (hors des considérations théologiques) a été reprise par Jean Piaget. La référence à Piaget est inévitable puisqu'il fut de son temps (soit environ de 1940 à 1980), le théoricien le plus actif, le plus systématique et le plus influent du constructivisme. Piaget a développé des assises théoriques pour soutenir sa réponse à la question fondamentale: "Comment le savoir se développe-t-il?". Il essaya de faire de cette question philosophique une question scientifique en étudiant le développement de l'intelligence et du savoir chez les enfants. Dans ses travaux, Piaget fut influencé par le philosophe néo-kantien Leon Brunschwig; son concept de schème fut d'ailleurs à l'origine emprunté à Kant bien que ses vues soient différentes de ce dernier.

Ainsi, dans les milieux de la psychologie, la perspective constructiviste de l'apprentissage n'est donc pas nouvelle. Par ailleurs, ce n'est que dans les dernières années que le constructivisme s'est infiltré dans la recherche en enseignement des mathématiques. Cette percée s'avère très prometteuse. Des travaux significatifs basés sur le constructivisme sont en cours aux États-Unis menés par des chercheurs de pointe tels Paul Cobb, Les Steffe et Ernst von Glasersfeld. Ce dernier est reconnu comme le chef de file de cette école de pensée.

En Grande-Bretagne, un des penseurs de premier plan de l'école constructiviste est John Mason. Bien qu'il se soit intéressé aux aspects philosophiques du constructivisme, son action est davantage à portée pratique. D'autre part, l'américain John Anderson et ses collègues ont été parmi les plus actifs sur la scène de la théorie de l'apprentissage. Une des idées centrales d'Anderson rapportée par Silver (1987) (qui est aussi partagée par plusieurs autres théoriciens de la connaissance) est la nature constructiviste du processus d'apprentissage.

> Une des hypothèses fondamentales de la psychologie de l'apprentissage est qu'une nouvelle connaissance est en partie "construite" par l'apprenant. Ce dernier ne fait pas qu'ajouter de la nouvelle information à son entrepôt de connaissances. Ce processus de construction de nouvelles relations est essentiel à l'apprentissage. Cela signifie que le savoir mathématique - autant le savoir procédural consistant à effectuer des manipulations mathématiques que celui des concepts et des relations

mathématiques - est toujours, à tout le moins en partie, "inventé" par chaque individu apprenant.

Comme Van Lehn l'a rapporté (en 1986) en prenant le concept de soustraction comme exemple, de nombreuses données supportent non seulement une vision constructiviste de l'apprentissage mais suggèrent aussi que le modèle traditionnel d'enseignement où "l'enseignant dit à l'élève quoi faire" ne semble plus approprié. En fait, la popularité croissante du constructivisme dans les milieux de l'éducation est une réaction à l'insatisfaction grandissante en regard du behaviorisme. Considérer l'élève comme un être anonyme, un être passif dans l'apprentissage dont il faut faire abstraction de ses structures mentales est de plus en plus difficile à justifier. Au contraire, considérer l'élève comme un individu ayant ses caractéristiques propres dont les structures mentales et les actions sont déterminantes dans le processus d'apprentissage est une idée qui est de mieux en mieux reçue. Le constructivisme est à nos portes.

2.2 Une définition

Dans la perspective constructiviste, le savoir ne se transfère pas. Présenter le constructivisme est alors une contradiction en soi puisqu'une compréhension du constructivisme doit elle-même être construite. Nous allons tout de même tenter de vous fournir quelques éléments de construction!

Les principes sur lesquels repose le constructivisme ne découlent pas d'études empiriques opposant l'apprentissage constructif à l'apprentissage non-constructif et comparant la qualité des apprentissages résultants. Le constructivisme découle plutôt de positions de nature philosophique. C'est une théorie de l'acquisition de connaissances mais ce n'est pas une théorie de l'enseignement. Il n'y a pas nécessairement de liens évidents entre une position philosophique concernant l'acquisition de connaissances et les moyens pédagogiques qui optimisent cette acquisition. En fait, le constructivisme est plutôt une perspective qui est appelée à jouer un rôle accru dans notre appréhension de la connaissance et qui recèle des promesses dans le remodelage de nos idées concernant l'enseignement et l'apprentissage. Maintenant, passons aux principes sous-jacents au constructivisme.

1. La connaissance n'est pas reçue de l'environnement mais est plutôt construite de manière active par l'apprenant.
2. a) Connaître est un processus adaptatif qui aménage l'ensemble des expériences d'un individu.
   b) Dans ce processus, l'apprenant ne découvre pas un monde indépendant existant hors de sa pensée.

Comme von Glaserfeld et Cobb l'ont remarqué (Kilpatrick, 1987), le premier des deux principes est beaucoup plus largement accepté par ceux qui se disent constructivistes. Le premier principe en est un auquel la plupart des théoriciens de la connaissance (hors de la tradition behavioriste) sont prêts à adhérer. Par contre, le deuxième principe constitue la pierre d'achoppement de plusieurs. Selon la terminologie introduite par von Glaserfeld, il sépare les tenants du constructivisme trivial (les adhérents au premier principe seulement) des tenants du constructivisme radical (les adhérents aux deux principes). Le constructivisme radical a été nommé ainsi car il rejette le réalisme métaphysique, il prône l'abandon de la recherche d'une vérité objective car, selon cette optique, nous ne pouvons connaître une réalité qui se situe à l'extérieur de nous-mêmes. Ainsi, pour les constructivistes radicaux, toute connaissance est acquise de manière active et subjective car le savoir objectif n'existe tout simplement pas.

Cette dernière assertion concernant la non-existence du savoir objectif est particulièrement difficile à accepter. Mais, comme l'a souligné Vergnaud (1987), il y a deux idées dans le second principe (que nous avons délibérément séparé en a) et b)). En a), il y a l'idée du processus adaptatif qui permet l'appropriation de connaissances et en b), il y a la négation du savoir objectif. Selon nous, il est possible d'adhérer aux principes 1 et 2a et de se proclamer constructivistes. Nous croyons que l'aspect subjectif auquel nous devons faire une place importante dans toute théorie de la connaissance est suffisamment bien servi par la reconnaissance des principes 1 et 2a. Fondamentalement, c'est notre position et le reste de l'exposé sera cohérent avec ce choix.

Par ailleurs, le constructivisme radical soulève un débat important que nous ne pouvons taire. De nombreux écrits analysent cette situation et des questions fondamentales telles "Qu'est-ce que le savoir?", "Qu'est-ce que le savoir objectif?", "Qu'est-ce que la vérité?" émergent ... et nous submergent! Nous y reviendrons lorsque nous traiterons le thème "Quelques considérations d'ordre philosophique" à la fin de cette section. Nous essaierons alors de résumer les principales objections au constructivisme radical.

Ainsi, le constructivisme traduit une perspective où le savoir est atteint non pas dans l'objet de connaissance, ni dans le sujet mais bien comme le produit d'une construction par le sujet, résultat de ses expériences, de ses interactions avec l'environnement. Le savoir n'est donc pas une simple copie de la réalité, ni une absorption d'information mais plutôt s'opère dans un processus où par essais et erreurs, le sujet se construit un modèle viable du monde qui l'entoure.

La qualité du savoir ainsi acquis est en partie déterminée par la façon dont la réalité réagit à nos interventions et par sa correspondance au savoir que les autres personnes ont construit. Lochhead ajoute (Blais, 1988):

> Ce que je vois comme un changement important à la nouvelle science cognitive est la reconnaissance du savoir comme une entité ne pouvant être simplement transférée de ceux qui l'ont à ceux qui ne l'ont pas... Le savoir est une entité que chaque apprenant doit construire pour et par lui-même. Cette vue du savoir comme une construction individuelle est habituellement associée au constructivisme.

Effectivement, le constructivisme rompt avec certaines conceptions établies. Dans une vue plus traditionnelle, l'apprentissage est perçu comme un transfert de connaissances de l'enseignant à l'élève où ce dernier fait sa propre copie du savoir tel un photocopieur. Une nouvelle vue émerge. De récents travaux suggèrent que l'apprentissage des mathématiques est une construction hautement personnelle basée sur les savoirs antérieurs ainsi que sur un système de croyances individuelles touchant les compréhensions, les intérêts, les attitudes et les habiletés métacognitives. Pour résumer, selon Carey (Schoenfeld, 1987), le point de vue constructiviste est le suivant:

> La pensée humaine est constructrice de théorie; depuis le tout début, nous construisons des structures explicatives qui nous aident à trouver la réalité profonde sous-jacente au chaos de surface.

Tous ces propos ont une allure bien théorique. Un exemple permettra de concrétiser ces idées. Max Beberman fut l'un des grands personnages du siècle sur la scène de l'enseignement des mathématiques. Un jour, sa fille de 7 ans revint de l'école avec plusieurs problèmes de soustraction à faire. Son père nota qu'elle obtenait d'étranges réponses. Par exemple, pour le problème 32-18, elle avait 26 comme réponse. Il la surveilla de près pour voir ce qu'elle faisait pour en arriver là.

$$\begin{array}{r} 32 \\ -18 \\ \hline 26 \end{array}$$

D'abord, elle aligna le nombre des dizaines au-dessus du nombre des dizaines, les unités au-dessus des unités. Ensuite, elle soustraya 1 de 3 obtenant 2 qu'elle écrivit dans la colonne des dizaines dans l'espace réservé à la réponse. Ensuite, puisqu'elle ne pouvait soustraire 8 de 2, elle soustraya 2 de 8 et écrivit le résultat dans la colonne des unités dans l'espace réservé à la réponse. Tous ceux qui ont enseigné la 2e année ou même la 3e, 4e ou 5e année ont vu ce phénomène.

Le professeur Beberman décida de corriger la situation en utilisant des procédures connues des excellents enseignants depuis des décennies. Il prit un paquet de bâtonnets et demanda à sa fille de les grouper en paquets de 10 retenus ensemble au moyen d'un élastique jusqu'à ce qu'elle en ait 32. Bien sûr, elle fit 3 groupes de 10 et en laissa 2 libres. Il lui demanda alors d'en enlever 18. Elle enleva un paquet entier de 10 et regarda la situation un moment. "Est-ce correct si j'enlève un élastique d'un groupe de 10?" demanda-t-elle. La figure rayonnante de son père lui montra qu'elle était sur la bonne voie. Elle enleva l'élastique puis 8 autres bâtons. "Combien te reste-t-il de bâtons?" lui demanda son père. "Dix et quatre de plus, cela fait 14," répondit-elle. "Maintenant, tu vois que 32 moins 18 fait 14 et non 26," enchaîna son père. Elle réfléchit à la tournure des évènements quelques moments puis répondit: "Avec des bâtonnets, la réponse est 14. À l'école, la réponse est 26." Cette histoire est typique de l'enseignement des mathématiques et il y a plusieurs leçons à en tirer.

D'abord, le professeur Beberman a sûrement appliqué une vision constructiviste à la résolution de ce problème. Au départ, il aurait pu être bien plus directif et dire: "Voyons, pour faire 2 moins 8, tu dois emprunter une dizaine puis ..." Plutôt, il a imaginé un environnement où sa fille pouvait être active. C'est elle qui a enlevé un paquet entier, qui a libéré un paquet de son élastique (ce qui correspond à l'action d'emprunter) puis qui a enlevé 8 bâtonnets. Personne ne lui a dit de faire ces opérations. L'environnement, de par sa configuration, permet ce type d'activités. Par contre, c'est le sujet qui a agi sur l'environnement et non le contraire comme dans le behaviorisme. Pour nous, c'est une différence fondamentale. Dans cette activité, ce sont les actions qui donnent lieu à la réflexion, la réflexion n'est pas une sorte de processus mental fermé, séparé de l'action. Selon Dewey (Pace, 1987), cela revêt une importance capitale:

> La connexion d'un objet et d'un sujet avec la promotion d'une activité ayant un but est le dernier mot d'une véritable théorie ayant de l'intérêt en éducation.

Dans cette perspective, le savoir est partie intégrante du processus. Dans l'oeuvre de Piaget, on retrouve aussi un thème sur la nécessité fondamentale de l'action dans le développement de l'intelligence. Que ces actions soient simplement sensori-motrices ou comportant des coordinations mentales plus complexes, l'équilibre de l'organisme en accord avec son environnement commence, a priori, avec celles-ci. Il précise (Pace, 1987):

> Le savoir provient de l'action, non pas dans le sens de simples réponses associatives, mais dans le sens plus profond de l'assimilation de la réalité dans la nécessaire coordination générale de l'action. Connaître un objet c'est agir sur lui et le transformer de telle sorte à pouvoir saisir les mécanismes de cette transformation comme s'ils fonctionnaient en connexion avec les actions transformantes. l'intelligence est alors construite comme une extension directe de nos actions.

On comprend alors davantage le sens profond des propos de Piaget lorsqu'il dit considérer l'individu comme un organisme actif, incorporant, construisant et reconstruisant des perspectives fondamentales de la réalité sur la base des interactions avec son environnement.

Pour revenir à l'exemple de la soustraction, il faut admettre que la connaissance n'a pas été complétée. Sans entrer dans les détails des mécanismes du constructivisme (qui feront l'objet du prochain thème), nous pouvons avancer que le processus adaptatif (principe 2a) qui aménage l'ensemble des expériences du sujet (ici, ses expériences recouvrent celles de l'école et celle de l'activité suscitée par son père) n'a pas été réalisé. Dans la perspective constructiviste, l'apprentissage survient par le biais de créations continuelles de règles et d'hypothèses cherchant à expliquer ce qui est observé. Ce besoin survient lorsque les présentes conceptions de l'élève de la réalité sont déséquilibrées par des disparités entre ces conceptions et de nouvelles observations. Dans l'exemple de la fille Beberman, ce déséquilibre, conflit ou contradiction a été provoqué mais n'a malheureusement pas été levé.

Le constructivisme ne dit pas, comme les critiques le prétendent, que nous ne pouvons rien enseigner. En portant attention à ses principes énoncés précédemment, il nous fournit des lignes directrices pour trouver comment enseigner. Le constructivisme nous rappelle aussi que l'ordre n'existe que dans l'esprit des gens. Ainsi, quand nous imposons au départ nos vues aux élèves, nous leur volons l'occasion de créer des connaissances, de les comprendre et de leur donner une signification.

Notre tâche est alors de comprendre et de nourrir le développement de l'élève en aménageant des environnements d'apprentissage où le passage entre ses connaissances antérieures et celles qu'on veut lui voir acquérir est possible par le biais d'une démarche personnelle que nous allons soutenir et encourager. Il faut garder à l'esprit que nous ne devons pas faire à la place de l'élève ce qu'il peut et, en fait, ce qu'il doit faire.

2.3 Les mécanismes du constructivisme

Le travail de Piaget, le constructiviste le plus prolifique du siècle, peut être interprété comme une longue recherche pour concevoir un modèle de génération du savoir. Selon Piaget, le développement mental est le mieux expliqué par un processus d'équilibration, de compensation résultant des activités du sujet en réponse à une intrusion. Cet équilibre en retour consiste en deux aspects complémentaires: les fonctions et les structures.

Les structures sont les formes d'activité mentale que Piaget utilise pour classifier les différents stades de développement cognitif: le stade sensori-moteur, le stade des opérations concrètes et celui des opérations formelles. Nous ne nous attarderons pas à ces structures, notre attention portera plutôt sur l'aspect fonctionnel. Ces fonctions que nous expliquerons forment un processus invariant qui survient à tous les stades du développement cognitif. La notion de schème est centrale à ce processus et c'est pourquoi il s'avère nécessaire de clarifier d'abord cette notion préalable.

La notion de schème

Procédons au moyen d'un exemple. Un enfant apprend rapidement qu'un hochet fait un son gratifiant quand il est agité et qu'il lui permet l'habileté de générer ce son à volonté. Il y a là la construction d'un schème. Un schème est constitué de trois parties:

a) la reconnaissance d'une certaine situation
(par exemple: la présence d'un objet saisissable avec une forme ronde au bout)
b) l'association d'une activité spécifique avec ce type d'élément.
(par exemple: le prendre et l'agiter)
c) l'attente d'un certain résultat
(par exemple: le son gratifiant)
Ici, le "schème-hochet" est un produit des activités de l'enfant, une construction personnelle élaborée à partir des éléments de son environnement.

Les schèmes sont les traces des expériences passées du sujet et la totalité des schèmes représente l'ensemble de ses connaissances. Mais Piaget ne perçoit pas les schèmes comme passifs, ils sont plutôt enracinés dans l'action. Ainsi, les schèmes les plus hâtifs prennent la forme de réflexes innés tels la succion ou la mise au point visuelle alors que les schèmes acquis par un bébé correspondent aux différentes actions qu'il peut porter aux objets de son environnement: les déplacer, les saisir, les mordre, leur faire produire des sons...

L'assimilation

Ainsi, il est bien vraisemblable que l'enfant, assis dans sa chaise haute au dîner, va essayer de saisir tout objet qui est à sa portée. Par exemple, il peut prendre un hochet que sa mère vient de lui présenter en cadeau. L'aspect de l'objet évoque en lui un schème existant: le "schème-hochet". Pour être sûr, il va agiter cet objet et constater avec plaisir qu'il produit le son anticipé. Nous avons alors, après vérification, une situation qui se conforme aux composantes d'un schème établi. Ce processus de vérification est appelé assimilation. Piaget croit que chaque schème existant cherche à assimiler tout objet à lui-même.

L'assimilation est donc un processus actif du sujet. De plus, puisqu'un schème est une forme de concept, assimiler un élément nouveau revient à le comparer à un concept et constitue en fait un acte de jugement. Quand un schème a fonctionné à plusieurs reprises (ou que l'assimilation s'est produite souvent), nous sommes portés à croire que cela ne peut être autrement et que nous avons découvert quelque chose du monde qui nous entoure. En fait, nous avons trouvé une façon d'utiliser nos expériences antérieures de façon à effectuer des prédictions fidèles concernant un certain type de situations.

Ainsi, l'assimilation permet au sujet de filtrer et d'interpréter la nouvelle information en termes de ses schèmes existants. Nous ne pouvons donc assimiler de nouvelles informations qui nous soient complètement étrangères. Dans ce sens, l'assimilation et l'intérêt vont de pair. On ne fait pas d'effort pour assimiler une nouvelle information qui n'attire pas notre attention. Le principe d'assimilation implique aussi que la compréhension ne peut être imposée. Un apprentissage significatif survient quand le sujet est activement engagé, intellectuellement et émotivement. Cela est possible quand le sujet rencontre des situations modérément nouvelles qui excitent sa curiosité naturelle.

L'accommodation

Revenons à l'exemple du bébé dans sa chaise. L'objet qu'il va saisir peut aussi être une cuiller. L'enfant peut assimiler cet objet au "schème-hochet". C'est une forme saisissable avec une forme ronde au bout. Par contre, brasser la cuiller ne produit pas le résultat que l'enfant attend: la cuiller ne fait pas de bruit. Cela génère une perturbation (ici, une déception) et cette perturbation est une des conditions qui prépare le terrain à un changement de la connaissance. Dans notre exemple, cela peut déplacer l'attention de l'enfant vers l'objet qu'il a entre les mains et cela peut le conduire à la perception de certains aspects lui permettant de reconnaître une cuiller comme n'étant pas un hochet. Le processus que l'on vient de décrire est une accommodation. Dans ce processus, le sujet est constamment à l'affût afin de vérifier les nouvelles informations confrontées aux structures cognitives existantes, révisant ces structures quand des divergences apparaissent et atteignant une nouvelle compréhension ou une nouvelle construction de la réalité. C'est ce processus de vérification ou de révision qui constitue l'accommodation.

D'autre part, il est possible que la cuiller, lorsqu'agitée, vienne frapper la table et produise un son différent mais également gratifiant. Cela aussi, va créer une perturbation qui peut mener à une accommodation différente, une de taille qui initie le schème de la "cuiller qui fait bang" que bien des parents connaissent trop! Ainsi, l'accommodation peut aussi résulter en la différenciation d'un schème en deux nouveaux schèmes.

En fait, assimilation et accommodation sont inséparables. L'accommodation est une activité du sujet qui interprète et juge ce qui a besoin d'être modifié et comment. Ainsi, selon Bringuier (Kitchener, 1986), il n'y a pas d'accommodation sans assimilation parce que c'est toujours de l'accommodation à ce qui a été assimilé, à un schème ou à un autre. Il y a donc un va-et-vient continuel entre assimilation et accommodation afin d'éliminer les perturbations, les conflits ou les contradictions. Cette recherche d'équilibre fait partie d'un processus qu'on appelle l'adaptation.

L'adaptation

> Le développement de l'intelligence ou du raisonnement se fait par stade à partir d'une situation nouvelle qui vient bouleverser le champ actuel, créant ainsi un déséquilibre que le sujet devra compenser par une adaptation, de laquelle résultera une rééquilibration majorante (Piaget, 1967)

L'adaptation est une forme de régie de nos savoirs. Supposons que deux schèmes soient activés par un même objet. Il y a conflit s'ils mènent à des interprétations différentes ou à des comportements différents. Un tel conflit doit être levé. Aucun des schèmes ne pouvant assimiler cet objet, les deux schèmes tendent à s'accommoder l'un et l'autre, soit par différenciation, soit par fusion ou encore par la naissance d'un troisième schème plus compréhensible que chacun des deux autres mais sans détruire la paire originale. Piaget maintient que le processus d'accommodation mutuelle se poursuit tant que tout conflit n'est pas résolu par la formation de schèmes plus différenciés ou plus englobants. C'est ce phénomène qu'il nomme adaptation. Dans cette perspective, la cognition, faculté de connaître, doit être considérée comme une fonction adaptative. Il peut y avoir une fausse interprétation du mot adaptation. Le sens technique du terme que Piaget utilise provient de la théorie de l'évolution. Dans ce contexte, l'adaptation réfère à un état d'organismes ou d'espèces qui est caractérisé par une habileté à survivre dans un environnement donné. Puisque le mot a souvent été utilisé comme verbe (cette espèce s'est adaptée à tel ou tel environnement), l'impression donnée est que l'adaptation biologique est une activité volontaire. C'est plutôt la nature qui fait la sélection: laissant vivre ceux qui ont les caractéristiques nécessaires pour faire face à leur environnement et laissant mourir les autres. De cette façon, on atteint une forme d'équilibre où le potentiel de survie dans un environnement donné est génétiquement assuré.

Dans la sphère de la cognition, cette forme d'équilibre fait référence à un état dans lequel les structures cognitives du sujet fournissent les résultats escomptés sans faire ressurgir à la surface des conflits ou des contradictions. Dans les domaines de la biologie et de la cognition, l'équilibre n'est pas une affaire statique mais est souvent dynamique comme l'équilibre maintenu par un cycliste. Par contre, il y a une différence importante. Au niveau biologique, on a affaire à des organismes qui, individuellement, ne peuvent modifier leur bagage génétique. Mais comme ils ne sont pas identiques, les espèces s'adaptent simplement parce que les individus non viables sont éliminés et ne se reproduisent pas. Au niveau cognitif, il y a des organismes vivant dans un monde de contraintes. Pour survivre, ils doivent être adaptés. Cela signifie qu'ils doivent être capables de gérer leurs expériences à l'intérieur des contraintes du monde dans lequel ils vivent. Ainsi, l'organisme cognitif doit tenter volontairement et activement de rendre signifiantes ses expériences de telle sorte à résoudre les conflits avec les contraintes du monde extérieur. De ce point de vue, la connaissance est alors une collection de structures conceptuelles qui s'avèrent être adaptées (ou comme le dit von Glasersfeld, "viables") à l'intérieur de l'ensemble des expériences du sujet. C'est ce processus adaptatif auquel on fait référence dans les principes du constructivisme.

Revenons maintenant aux problèmes de soustraction de la fille de M. Beberman. Dans ce cas, l'adaptation n'a pu se faire non pas à cause d'un manque de compréhension dans l'activité suggérée, mais bien à cause d'attitudes ou de croyances qui ont littéralement bloqué le fonctionnement du processus adaptatif.

2. Le constructivisme

Certains élèves décident tôt dans leur cheminement scolaire que les mathématiques apprises à l'école n'ont rien à voir avec le monde hors de l'école. Ils ne voient pas de conflit entre une réponse à un problème obtenue par des méthodes scolaires et une autre obtenue en manipulant des objets réels. Ils pensent que les mathématiques n'ont absolument rien à voir avec leurs expériences.

Aspect social

Dans le constructivisme, y a-t-il une place pour les interactions sociales? Le fonctionnement décrit précédemment semble fortement centré sur l'individu. Piaget ne s'est pas très souvent préoccupé des questions des interactions sociales comme facteur de progrès cognitif. Mais puisque "des modèles successifs de la réalité construite par le sujet demeurent des approximations", il faut trouver un moyen de distinguer entre des croyances subjectives et le savoir objectif. Piaget ajoute (Sinclair, 1987) "Le savoir objectif est atteint seulement lorsqu'il a été discuté et vérifié par d'autres". Ainsi, ce n'est que lorsque nos schèmes correspondent à ceux des autres qu'ils deviennent une base objective valide pour des constructions futures. Il y a là une explication de l'importance pour chacun de voir ses schèmes confirmés par d'autres. L'utilisation d'un schème implique toujours l'attente d'un résultat plus ou moins spécifique. Ce résultat peut être traduit par une prédiction. Alors, si on prédit une action ou une réaction d'un autre sujet et que cette prédiction se réalise, cela ajoute un deuxième niveau de viabilité au schème renforçant par le fait même l'objectivité des connaissances sur lesquelles il s'appuie.

D'autre part, partager des idées, discuter, argumenter ou simplement collaborer dans un jeu constructif sont des ingrédients déclencheurs aux déséquilibres nécessaires à l'accommodation. Ainsi, le travail en coopération peut contribuer à la croissance de la connaissance à tous les stades de développement. Dans ces activités, les constructions d'un individu doivent s'harmoniser avec celles des autres membres du groupe. C'est cette recherche d'harmonie entre les interprétations personnelles et celles du groupe qui rendent possible la communication mathématique et l'expérience subjective d'une réalité mathématique objective. Les mathématiques sont alors à la fois une activité de construction individuelle et une activité humaine sociale.

En résumé

Le fonctionnement constant qui survient à tous les stades de développement est composé de trois activités: l'assimilation, l'accommodation et l'adaptation. Ces trois activités forment un processus actif ininterrompu dans lequel l'individu interagit avec l'environnement extérieur (physique et social) et, en retour, est influencé par ce dernier. Ainsi, l'individu tente d'assimiler le monde externe à partir de ses structures cognitives existantes et, puisque les objets de connaissance répondent de manière plus ou moins satisfaisante, cela génère parfois des perturbations face à des résultats attendus qui ne se produisent pas. Ces disparités causent une modification de certaines structures cognitives en place pour les accommoder au monde extérieur. Équilibrer le processus entre assimilation et accommodation est appelée l'adaptation, processus dynamique qui n'est jamais terminé car il faut continuellement réorganiser et restructurer nos schèmes en un tout cohérent pour faire place aux nouveaux objets de connaissance.

2.4 Quelques considérations d'ordre philosophique

Le constructivisme, peu connu il y a quelques années, attire maintenant beaucoup l'attention dans le monde de l'éducation mathématique. Beaucoup de gens pensent et écrivent sur ce sujet et ces gens-là ne sont pas tous d'accord. Certains sympathisent avec les idées pédagogiques générales suggérées par le constructivisme mais trouvent difficile l'exposé théorique du constructivisme et surtout sont parfois rebutées par le constructivisme radical. Dans ce thème, nous apporterons les principales objections au constructivisme radical. Ceux qui sont moins intéressés par ces questions peuvent passer au thème 2.5 sans perte de continuité.

Dans le constructivisme radical, il ne faut pas oublier que l'on nie l'existence d'un savoir objectif. C'est assurément une pomme de discorde de taille pour les enseignants de mathématiques. Selon Davis et Hersch (1980):

> ... l'activité de la recherche mathématique force une reconnaissance de l'objectivité de la vérité mathématique ... les faits mathématiques sont ce qu'ils sont et non ce qu'on souhaiterait qu'ils soient.

Gardner ajoute (Kilpatrick, 1987):

> l'existence d'un monde externe, organisé mathématiquement, est pris pour acquis. Je n'ai pas encore rencontré un mathématicien consentant à dire que si la race humaine s'éteignait, la lune ne serait plus sphérique.

Décidément, le constructivisme radical ne fait pas bon ménage avec le réalisme mathématique.

Selon von Glaserfeld, la théorie de Piaget contient explicitement ce qu'il appelle le constructivisme radical. Selon ses dires (Kitchener, 1986), "la cognition doit être considérée comme un processus d'une construction subjective plutôt qu'une découverte d'une réalité ontologique." En résumé, toujours selon von Glaserfeld, "nous construisons la réalité". Il est difficile de concilier cette prise de position avec une affirmation de Piaget que nous reprenons: "Le savoir objectif est seulement atteint lorsqu'il a été discuté et vérifié par d'autres". De plus, Piaget (1970) affirme souvent et très explicitement que l'objet existe indépendamment de nous et que nous arrivons à découvrir de plus en plus ses propriétés.

> Pour être sûrs, l'objet et ses structures objectives existent par eux-mêmes avant d'être découverts. Mais, ils ne sont pas découverts à la suite d'une recherche opérationnelle de la façon dont Colomb découvrit l'Amérique durant ses voyages; ils ne sont découverts qu'en étant construits; en d'autres mots, nous pouvons graduellement les approcher, mais nous n'avons jamais la certitude de les avoir atteints.

Selon cette perspective, connaître un objet ne veut pas dire le copier, cela signifie agir sur celui-ci. Connaître la réalité signifie construire des systèmes de transformation qui correspondent plus ou moins adéquatement à la réalité.

La connaissance est alors un système de transformations qui devient progressivement adéquat. Piaget se voyait tout de même comme un réaliste un peu spécial. Ainsi, il dit (Kitchener, 1986):

> Chaque pas en avant dans la connaissance qui mène le sujet plus près de l'objet, ce dernier s'éloigne... de telle sorte que les modèles successifs élaborés par le sujet ne sont rien d'autre que des approximations qui, malgré des améliorations, ne peuvent atteindre l'objet lui-même qui continue à posséder des propriétés inconnues...

Cela ne signifie pas que les sujets vivent toujours dans un monde de leur propre construction mais signifie qu'ils ne peuvent atteindre une connaissance absolue telle qu'elle est. Selon Piaget, cela est applicable aux enfants aussi bien qu'aux scientifiques ou à la science comme entreprise sociale. Pour terminer, nous allons nous appuyer sur un extrait du livre de Kitchener (1986) qui résume mieux que quiconque les objections au constructivisme radical et la position de Piaget en regard de cette situation.

> Le concept de constructivisme radical est logiquement incohérent. Ce point de vue ne peut être contenu explicitement dans l'épistémologie génétique de Piaget. Si c'était le cas, sa théorie du constructivisme serait logiquement insoutenable. Mais on a toutes les raisons du monde de rejeter cette interprétation (même si Piaget semble quelquefois l'adopter) en faveur d'une plus plausible. Ainsi, j'ai suggéré que le constructivisme d'aucune façon nie un réalisme métaphysique. Le sujet épistémologique construit l'objet épistémologique au moyen de constructions de schèmes et de concepts nécessaires pour le savoir.
>
> Mais l'environnement doit jouer un rôle important. Ce que l'épistémologiste apprend en observant le sujet épistémologique dans son environnement est que le sujet s'accomode lui-même à son environnement. L'épistémologiste observe qu'il y a une augmentation de l'objectivité et de validité lorsque l'organisme devient de plus en plus adapté à son environnement. Mais ce procédé ne serait pas possible s'il n'y avait pas d'environnement. S'il y a une leçon à tirer ici, c'est qu'il ne s'agit pas d'une construction subjective mais tout le contraire, le sujet épistémologique atteint de plus en plus d'objectivité et cela s'applique aussi à l'épistémologiste. ainsi l'épistémologiste opère dans un cadre objectif. Le constructivisme est l'affirmation que le savoir est atteint non pas dans l'objet (tel l'empirisme) et non pas dans le sujet (tel le rationalisme) mais comme le résultat d'une construction graduelle du sujet épistémologique, comme une conséquence de son interaction avec son environnement. Ce n'est donc pas une construction complètement subjective puisque l'environnement (ou la réalité) joue un rôle décisif en délimitant les constructions possibles et en établissant les contraintes sur les constructions adéquates. Ainsi, le constructivisme de Piaget doit être associé à une certaine forme de réalisme.

2.5 Différences entre constructivisme et behaviorisme

Dans la philosophie constructiviste, la connaissance d'une personne est vue comme un ensemble de constructions personnelles. Les mathématiques deviennent alors plus significatives à l'élève car elles ont été développées par le biais d'un engagement personnel en vue de la création d'une nouvelle compréhension. Ces constructions sont réalisées au moyen d'actions volontaires du sujet sur son environnement. L'environnement est certes important mais c'est le sujet qui agit sur lui et non l'inverse comme dans le behaviorisme.

Également, comme on l'a vu, le déséquilibre ou le conflit est un ingrédient essentiel au constructivisme. Il provoque l'accommodation qui, en retour, mène à l'adaptation. Il faut rechercher les situations qui vont favoriser un réaménagement plus cohérent des schèmes de l'élève. Ainsi, commettre une erreur ou vivre une contradiction temporaire n'est plus une erreur de parcours comme dans le behaviorisme mais plutôt le chemin normal qui mène à la connaissance.

Dans une vue constructiviste, on assiste à une redéfinition des rôles de l'élève et du professeur. L'apprentissage est centré sur l'élève. C'est lui qui amorce les actions qui constituent l'apprentissage. Il doit absolument être actif: expérimenter, chercher des solutions, faire de nouveaux essais, éliminer les conflits dans des activités que le professeur lui proposera. Ces activités sont beaucoup moins parcellaires que celles proposées dans le behaviorisme: elles visent l'acquisition de notions, de concepts ou de résultats fondamentaux. De plus, dans le behaviorisme, l'élève est continuellement à la remorque du professeur, en attente de recevoir son prochain stimulus. Dans le constructivisme, on fait davantage appel à son initiative personnelle.

D'autre part, le rôle du professeur devient beaucoup moins directif, ce n'est plus le transmetteur de connaissances. Sa tâche principale consiste à modeler l'environnement de l'élève afin de lui permettre de porter des actions qui le mèneront à la connaissance. Cet environnement devrait comporter des éléments qui, potentiellement, peuvent provoquer des déséquilibres cognitifs susceptibles de favoriser une réorganisation des schèmes de l'élève. Par la suite, le professeur doit soutenir et encourager l'élève dans sa démarche personnelle.

Dans le constructivisme, on constate que les processus d'apprentissage occupent un rôle de premier plan. En fait, connaître devient un processus et non un produit ou une copie comme on le voit dans le behaviorisme. Aussi, la nature du processus constructiviste d'apprentissage favorise une plus grande autonomie intellectuelle, ce que développe certainement à un degré moindre l'approche behavioriste. En regard des situations nouvelles, la vue constructiviste est nettement plus réaliste.

De plus, les processus mentaux sont la pierre angulaire du constructivisme. En effet, toute la démarche est basée sur un modèle de génération du savoir gravitant autour de ces processus. On peut y noter une forme de valorisation des capacités intellectuelles de l'être humain, capacités dont fait complètement abstraction le behaviorisme. Finalement, comme on a pu s'en rendre compte, une adhésion intégrale au behaviorisme est liée à une vision très réductionniste et très statique des mathématiques. On se limite aux habiletés mécaniques laissant de côté l'aspect créatif des mathématiques. Par ailleurs, si on adopte une vision dynamique des mathématiques, l'approche constructiviste est nettement plus attirante.

En conclusion, la comparaison entre constructivisme et behaviorisme met en opposition deux systèmes de valeurs, le modèle mécaniste et le modèle organique, qu'a fort bien décrits Knowles (1990):

> Il existe deux systèmes qui ont largement influencé aussi bien les sciences physiques que les sciences sociales. Il s'agit d'une part de la vision d'un monde mécaniste, qui repose sur la métaphore de la machine, et, d'autre part de la vision du monde organique, qui repose sur la métaphore de l'organisme, ce système vivant et structuré qui vit l'expérience sous plusieurs formes.
>
> Le modèle mécaniste représente l'univers comme une machine composée de pièces fonctionnant dans un univers spatio-temporel. Ces pièces constituent la réalité fondamentale à laquelle on peut finalement réduire tous les autres phénomènes plus complexes. Lorsqu'on applique des forces, les événements se déclenchent en chaîne et ces forces étant le seul moyen de provoquer efficacement et instantanément les événements, il est possible, en principe, de les prédire. Si on applique cette vision du monde aux domaines de l'épistémologie et de la psychologie, on obtient un modèle humain réactif et passif, une sorte de robot, un organisme vidé de sa substance. Par nature, l'organisme est immobile, et l'activité est la résultante de forces externes. Les fonctions psychologiques telles que la pensée, la volonté, le désir et la perception sont considérées comme des phénomènes complexes que l'on peut réduire à des phénomènes plus simples par la procédure des causes efficaces. Les variations des composantes ou des comportements de l'organisme ne sont pas vues comme le résultat de changement de la structure même de l'organisme...
>
> Le modèle organique représente l'univers comme un organisme unifié et interactif en développement. Contrairement au modèle mécaniste et ses particules élémentaires statiques, son essence réside dans l'activité. Si l'on applique cette vision du monde aux domaines de l'épistémologie et de la psychologie, on obtient un modèle d'organisme humain naturellement et spontanément actif. L'homme y est vu comme un organisme actif, et non pas comme un ensemble d'actes déclenchés par des forces externes, ainsi que comme une unité structurée.
>
> Tout individu qui répondra à ce modèle aura tendance à insister sur la signification du processus plutôt que sur celle des produits, sur le changement qualitatif plutôt que sur le changement quantitatif. De plus, il mettra plus l'accent sur la signification du rôle que joue l'expérience dans l'encouragement ou l'inhibition du développement, que sur la formation en tant que source de développement.

En fin de compte, c'est une perception de l'être humain qui transparaît lorsque nous faisons des choix pédagogiques. En sommes-nous toujours réellement conscients?

3

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

3. LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

3.1 La résolution de problèmes : c'est quoi?

Peut-on imaginer qu'un élève suive un cours de mathématiques sans être confronté à la tâche de résoudre des problèmes? Bien sûr que non car étudier des mathématiques et résoudre des problèmes sont des activités indissociables. Mais le concept de problème ne se limite pas seulement aux mathématiques, il a une portée beaucoup plus générale.

Qu'est-ce qu'un problème?

En cherchant dans la littérature traitant de résolution de problèmes, on trouve plusieurs définitions de la notion de problème. Schoenfeld (1985) propose la suivante:

> Définir le terme problème est difficile car la résolution d'un problème est subjective et circonstancielle. Les mêmes tâches qui pourraient exiger des efforts significatifs de la part de certains élèves peuvent très bien être des exercices de routine pour d'autres. ... Donc être un problème n'est pas une propriété inhérente à une tâche mathématique ... pour que le problème soit mathématique, des concepts et des principes mathématiques doivent être utilisés dans la recherche de la réponse.

Pour Polya (1967):

> Poser un problème signifie donc: rechercher de manière consciente une certaine ligne d'action en vue d'atteindre un but clairement conçu, mais non immédiatement accessible. Résoudre un problème, c'est trouver cette ligne d'action.

Enfin, pour Krulick et Rudnick (1980):

> Un problème est une situation, quantitative ou non, qui confronte un individu ou un groupe d'individus, en requérant une solution et dans laquelle l'individu ne voit aucun moyen apparent ou évident ni aucun chemin pour obtenir la solution. Selon l'expérience mathématique des personnes, ce qui était un problème initialement est réduit à un exercice de routine. Ce qui peut être un problème pour une personne n'est peut-être qu'un exercice ou n'offre aucun intérêt pour une autre. Nous acceptons le principe qu'un problème doit être perçu comme tel par un élève. ... Donc un problème doit satisfaire les trois critères suivants:
>
> 1. Acceptation: l'individu accepte le problème. Il y a une implication personnelle qui peut être due à une variété de raisons, incluant une motivation interne, une motivation externe (pression d'un pair, d'un parent et/ou de l'enseignant), ou simplement le désir d'éprouver la satisfaction de résoudre un problème.
> 2. Blocage: les tentatives initiales de l'individu pour résoudre le problème ne portent pas fruit. Ses réactions habituelles et ses stratégies d'attaque ne fonctionnent pas.
> 3. Exploration: l'implication personnelle identifiée en (1) force l'individu à explorer de nouvelles méthodes d'attaque.

Il se dégage donc de ces définitions que celui qui est confronté à un problème est face à une difficulté et il doit s'impliquer activement et émotivement dans un processus qui lui est au départ inconnu. Soulignons que, pour nous, un exercice de routine n'est pas reconnu comme un problème. Nous ne voulons certainement pas entendre par là que ces exercices devraient disparaître des cours de mathématiques. Au contraire, nous reconnaissons leur importance et leur raison d'être. Par ailleurs, dans tout cours de mathématiques, les élèves devraient aussi avoir l'occasion d'être confrontés à des situations qui vont bien au-delà des exercices de routine.

La résolution de problèmes: quelques interprétations

Dans une enquête qu'il a tenue aux États-Unis auprès de professeurs de l'ordre secondaire, Grouws (1990) cherchait à établir leur conception de la résolution de problèmes et de son enseignement. Les quatre interprétations suivantes ont été mises en évidence.

1. La résolution de problèmes, c'est résoudre des problèmes écrits.
2. La résolution de problèmes, c'est de trouver des réponses à des problèmes.
3. La résolution de problèmes, c'est de résoudre des problèmes pratiques.
4. La résolution de problèmes, c'est résoudre des problèmes de réflexion.

Les trois premières conceptions mettent l'accent sur la nature d'un problème alors que la dernière insiste sur le processus de résolution. En résolution de problèmes, il est important de distinguer le processus (la démarche de résolution) du produit (la réponse). Revenons aux quatre conceptions précédentes. Elles sont insatisfaisantes: soit imprécises, incomplètes ou carrément erronées. La résolution de problèmes, c'est plus que résoudre des problèmes écrits ou trouver la réponse à un problème. Travailler des exercices de routine a parfois, à tort, été confondu avec la résolution de problèmes. Comme dans le cas de la définition de problème, il y a plusieurs définitions acceptables. Voyons ce qu'en pensent les experts.

Aux Etats-Unis, le National Council of Supervisors of Mathematics a proposé comme définition de la résolution de problèmes:

> ... le processus d'appliquer des connaissances préalablement acquises à des situations nouvelles et non familières.

Pour Silver (1987):

> La résolution de problèmes fait intervenir l'application des connaissances d'un individu à des tâches qui peuvent être bien ou mal structurées, familières ou non, simples ou complexes.

En Angleterre, le rapport Cockcroft de 1982 sur l'enseignement des mathématiques énonce:

> Les mathématiques sont "utiles" dans la mesure où elles peuvent être appliquées à une situation particulière et c'est l'habileté à appliquer les mathématiques à une variété de situations à laquelle nous donnons le nom de résolution de problèmes.

De son côté, Branca dans l'annuaire du N.C.T.M. de 1980 présente la résolution de problèmes comme un but:

> Quand la résolution de problèmes est considérée comme un but, elle est indépendante de problèmes spécifiques, de procédures ou méthodes et de contenu mathématique. Apprendre à résoudre des problèmes est la raison première d'étudier les mathématiques et constitue une considération majeure.

... comme une habileté fondamentale:

> La dernière, mais certainement pas la moindre, interprétation de la résolution de problèmes est comme une habileté fondamentale.

Enfin, pour Polya (1965), le processus de résolution se traduit par un modèle comportant quatre phases:

1. Comprendre le problème.
2. Concevoir un plan.
3. Mettre le plan à exécution.
4. Examiner la solution obtenue.

Pour chacune de ces phases, George Polya nous suggère une panoplie de stratégies de résolution (des heuristiques), pour nous aider à progresser dans la recherche de la solution. Comme nous pouvons le constater, il n'est pas facile de cerner le concept de résolution de problèmes, tout comme celui de problème. La résolution de problèmes n'en demeure pas moins fondamentale puisqu'elle réside au coeur de l'activité mathématique. Mais il n'est pas nécessaire d'attendre des cours séparés de résolution de problèmes pour parler de méthodes de résolution; cet aspect peut s'intégrer à tous nos cours.

3.2 La résolution de problèmes: comment?

Les heuristiques

Pour l'enseignement des mathématiques, 1945 constitue un moment marquant entre deux époques: la résolution de problèmes avant et après George Polya. C'est en effet en 1945 que George Polya, mathématicien et éducateur d'origine hongroise, publia *How to solve it*. Son influence sur la pensée mathématique a été énorme. De même, les éducateurs en mathématiques ont reconnu ses apports et son influence. Les mathématiciens s'entendent pour qualifier de très justes les descriptions qu'a faites Polya des stratégies de résolution de problèmes. Un tableau couvre les deux premières pages du livre *How to solve it* où Polya, pour chacune des quatre phases de son modèle présente des questions et des suggestions dont le but est d'aider celui qui cherche à résoudre des problèmes. Voilà ce que sont les heuristiques. Schoenfeld (1980) en donne la définition suivante:

> Le mot heuristique sera utilisé ici pour signifier une suggestion ou une stratégie générale, indépendante de tout sujet ou discipline particulière, qui aide celui qui résout un problème à approcher, à comprendre un problème et à rassembler efficacement ses ressources pour le résoudre.

En effet, en regardant les questions et les suggestions que nous propose Polya, on ne trouve la trace d'aucune discipline en particulier. Ces suggestions pourraient donc s'appliquer à la résolution de problèmes dans une variété de domaines de connaissance. Par contre, l'utilisation de ces heuristiques n'est pas facile; elles sont générales, subtiles, complexes et hautement abstraites. Donnons quelques exemples d'heuristiques selon chacune des phases.

Phase 1 (Comprendre le problème)

- Représenter un problème

"Comprendre le problème" constitue la première phase du modèle de résolution de Polya. Cela correspond à construire une représentation initiale du problème. Elle peut être réalisée en faisant un diagramme, un tableau, en introduisant une notation appropriée, en identifiant les données, en établissant la condition et l'inconnue s'il s'agit d'un problème où il faut découvrir un certain objet ou en établissant l'hypothèse et la conclusion s'il s'agit d'un problème de démonstration. À ce sujet, Silver (1987) affirme que:

> La qualité de la représentation d'un problème que s'en fait celui qui tente de résoudre ce problème est centrale au processus de résolution de problèmes.

Tout professeur de calcul différentiel et intégral a probablement suggéré à ses élèves de faire un dessin dans un problème d'optimisation ou de taux de variation liés (même si ce n'est pas toujours possible ou nécessaire) et de se donner une notation appropriée. Ce sont des éléments qui contribuent à la représentation d'un problème.

Phase 2 (Concevoir un plan)

- Peut-on imaginer un problème plus particulier?

Particulariser peut permettre de mieux comprendre un problème, de découvrir une régularité (pattern), de résoudre un cas particulier qui servira de marche-pied au cas général. Cependant, il faut être prudent; à partir d'un cas particulier, on ne peut pas nécessairement généraliser. L'heuristique généraliser est la duale de particulariser: ces deux stratégies de résolution sont des alliées naturelles.

- Raisonner par analogie

Dans des cours de géométrie vectorielle, l'analogie s'exploite avantageusement quand il s'agit de passer des propriétés des vecteurs à deux dimensions à des propriétés semblables des vecteurs à trois dimensions. Silver (1987) cite Clement qui a constaté que:

> ... les experts en mathématiques et dans certains domaines scientifiques s'engagent dans un processus métaphorique quand ils construisent la représentation d'un problème, c'est-à-dire qu'ils cherchent des analogies entre leur problème et d'autres situations avec lesquelles ils sont familiers, et ils utilisent ces analogies pour suggérer des représentations possibles des problèmes qu'ils cherchent à résoudre. ... Ces analogies prennent souvent la forme d'images mentales.

• Raisonner de façon régressive

En termes plus simples, c'est travailler à reculons. On part de l'inconnue et on tente de remonter aux données en se posant des questions du type: Comment puis-je déterminer cette sorte d'inconnue? De quelle donnée ai-je besoin pour déterminer cette inconnue? En cherchant l'antécédent de l'antécédent, nous pouvons trouver un chemin liant l'inconnue aux données. L'approche qui procéderait dans le sens inverse est dite approche progressive ; elle procède directement des données vers l'inconnue.

• Si on ne peut résoudre le problème proposé, essayer de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache.

Peut-on imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible? Un problème plus général? Un problème plus particulier? Peut-on résoudre une partie du problème? Peut-on résoudre un problème intermédiaire qui servirait de tremplin à la résolution du problème de départ?
Nous venons de présenter, dans ce qui précède, plus d'une heuristique; mais elles relèvent toutes de la même logique: modifier un problème et travailler sur ce nouveau problème en espérant que nos découvertes puissent nous aider à résoudre le problème original.

Phase 3 (Mettre le plan à exécution)

• En mettant le plan à exécution, en vérifier chaque détail l'un après l'autre.

Peut-on voir clairement si ce détail est correct?
Peut-on démontrer s'il est correct?

Phase 4 (Examiner la solution obtenue)

• Peut-on vérifier le résultat?

Dans le contexte du problème, la réponse obtenue est-elle plausible?
Maintenant que l'on a un résultat, peut-on imaginer une démarche différente, plus simple ou plus directe?
Peut-on se servir du résultat ou de la méthode pour quelqu'autre problème?

La plupart de ces heuristiques proviennent des suggestions de Polya. Rappelons que les experts en résolution de problèmes reconnaissent leur pertinence et leur utilité. Ils considèrent que Polya a visé juste.

Exemples de résolution de problèmes à l'aide d'heuristiques

Exemple en calcul différentiel et intégral

Dans un cours de calcul différentiel et intégral, le problème suivant peut être proposé à une classe (nous l'avons fait à plusieurs reprises): considérons la branche positive du graphique associé à la fonction $1/x$. Montrer que tous les triangles formés par une tangente à la courbe et les axes de coordonnées ont la même aire.

Pour que l'élève puisse résoudre ce problème, il doit posséder certaines connaissances en calcul différentiel. Il doit connaître une façon de calculer la pente de la tangente en n'importe quel point de la courbe associée à la fonction $1/x$ soit "au long", soit à l'aide des formules de dérivée. Illustrons l'utilisation de certaines heuristiques en résolvant ce problème par une *approche régressive*, ce que nous avons réalisé plusieurs fois en classe avec la collaboration des élèves. Afin de mieux comprendre le problème et suggérer des voies d'approche, faisons une *représentation graphique* et introduisons une notation appropriée pour désigner le point quelconque de la courbe.

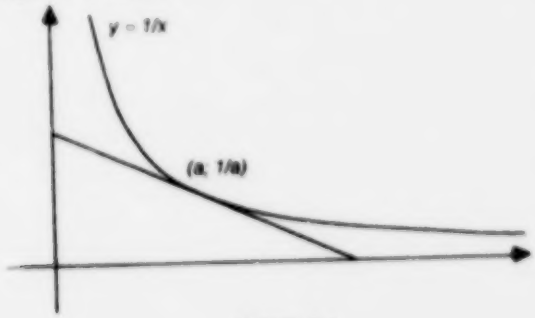


Figure 3.1

Plusieurs triangles pourraient être dessinés sur le même graphique pour mieux saisir la nature de la question. Que voulons-nous montrer? Que tous les triangles considérés ont la même aire. Que vaut cette aire? Nous ne la connaissons pas. Imaginons un *problème qui se rattache* au nôtre: calculer l'aire du triangle formé par la tangente à la courbe au point $(a; 1/a)$ et par les axes de coordonnées. Comment pouvons-nous déterminer ce type d'inconnue? Par la formule de l'aire du triangle que connaissent bien nos cégépiens:

$$\text{aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Nous devons donc déterminer la base et la hauteur de notre triangle. Pour déterminer la base, il suffit de connaître la première coordonnée du point Q (voir Figure 3.2). De même, pour la hauteur, il suffit de connaître la seconde coordonnée du point P.

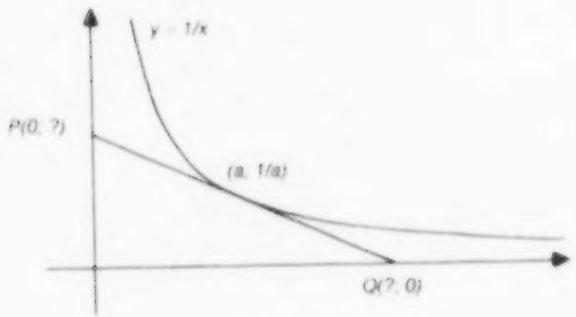
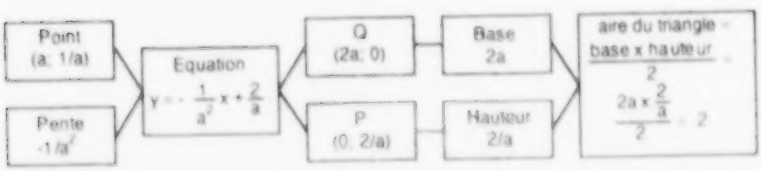


Figure 3.2

Comment maintenant déterminer les coordonnées de *P* et de *Q* ? Il suffit d'avoir l'équation de la tangente. Avons-nous cette information? Non, mais nous pourrions l'obtenir à partir d'un point et de la pente de la tangente. Mais oui, ce point est *(a, 1/a)* et nous savons comment calculer la pente de la tangente.

Nous demandons alors aux élèves de mettre ce plan à exécution en effectuant les calculs appropriés. Le diagramme suivant illustre bien l'ordre dans lequel se fait l'*approche régressive*, de l'inconnue vers les données (- - - -), et le sens suivant lequel s'effectuent les calculs, des données vers l'inconnue (- - - -).

sens de l'approche (- - - -)



sens des calculs (- - - -)

Figure 3.3

L'aire égale donc 2 unités d'aire. Comme ce résultat est indépendant de *a* et du point de tangence sur la courbe, nous en concluons que tous les triangles considérés ont la même aire. C'est ce que nous voulions montrer!

Exemple en algèbre vectorielle

Aux élèves qui étudient les vecteurs dans leur cours de mathématiques, le problème suivant peut être proposé.

Trouver un vecteur unitaire de l'espace cartésien qui détermine avec les trois axes de référence trois angles ayant la même mesure.

L'élève qui possède les connaissances de base relatives aux vecteurs ainsi qu'au produit scalaire a suffisamment d'informations pour résoudre ce problème. Voici une solution, parmi d'autres, qui illustre certaines heuristiques.

Commençons par *résoudre un problème rattaché au problème* considéré en mettant de côté une partie de la condition, celle voulant que le vecteur cherché soit unitaire. Tentons donc de *résoudre le sous-problème* suivant.

Trouver dans l'espace cartésien un vecteur qui détermine des angles égaux avec les axes de référence.

Une fois ce vecteur trouvé, nous pourrons "ajuster" sa longueur.

Notons (x, y, z), le vecteur cherché. Il doit former avec les axes des angles égaux. On peut *reformuler* cette condition en disant que le vecteur (x, y, z) doit former des angles égaux avec chacun des vecteurs (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1). Les propriétés du produit scalaire nous permettent de traduire ce fait en équations. Notons par A_1, A_2 et A_3, les angles que fait respectivement le vecteur (x, y, z) avec l'axe des X, l'axe des Y et l'axe des Z. En particulier, nous avons

$$\cos(A_1) = \frac{(x, y, z) \cdot (1, 0, 0)}{|(x, y, z)|\,|(1, 0, 0)|}$$

$$\cos(A_1) = \frac{x}{|(x, y, z)|}$$

De même,

$$\cos(A_2) = \frac{y}{|(x, y, z)|} \text{ et } \cos(A_3) = \frac{z}{|(x, y, z)|}$$

Le fait que les trois angles soient égaux se traduit par

$$\frac{x}{|(x, y, z)|} = \frac{y}{|(x, y, z)|} = \frac{z}{|(x, y, z)|}$$

Et nous concluons que $x = y = z$.

Tout vecteur de l'espace cartésien avec trois composantes identiques sera solution de notre sous-problème, en particulier, le vecteur (1, 1, 1). Notre sous-problème est résolu. Revenons au problème initial et tenons compte de la condition voulant que le vecteur cherché soit unitaire. Multiplions le vecteur (1, 1, 1) par un scalaire approprié pour obtenir un vecteur unitaire de même orientation. Il est facile de déterminer que le scalaire en question est $1/\sqrt{3}$. Ainsi, le vecteur $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ satisfait toutes les conditions de notre problème de départ. Son opposé en fait tout autant. À titre de vérification, on peut calculer explicitement les angles que fait le vecteur $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ avec les axes de référence et dans chaque cas on trouve approximativement 54,74°.

Exemple en analyse combinatoire
On veut fabriquer des moules afin de produire les différentes pièces d'un jeu de dominos constituées de deux parties, chacune comportant entre 0 et 6 points. Combien de moules différents doit-on faire?

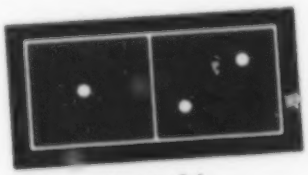


Figure 3.4

Voici une solution à ce problème.
Pour produire la pièce avec un point à gauche et 2 points à droite ou 2 points à gauche et 1 point à droite, un seul moule suffit. Dans ce problème, l'ordre doit être ignoré. Analysons quelques *sous-problèmes* pour un nombre maximal de points de chaque côté du domino limité à 0, 1, 2, 3, 4. Si la limite est 0, seul le domino 0-0 est possible. Si la limite est 1, on a les dominos 0-0 et 0-1. Si la limite est 2, on doit fabriquer des moules pour les dominos 0-0, 1-1, 2-2, 0-1, 0-2, 1-2. Si la limite est 3, on peut *énumérer toutes les possibilités*: 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 0-1, 0-2, 0-3, 1-2, 1-3, 2-3. Si la limite est 4, ces possibilités deviennent: 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4. Dès lors, on peut *dresser une table* comme suit

Limite	Nombre de dominos
0	1
1	3
2	6
3	10
4	15

Dans cette table, on peut *chercher une régularité (pattern)*. Dépendant des connaissances antérieures de l'élève, cette régularité peut revêtir différentes formes. Par exemple, dans l'énumération des cas où la limite est 4, on peut remarquer qu'il y a 5 cas où les nombres de points sont identiques des deux côtés du domino, il y a 4 autres cas où le "0" intervient, 3 autres cas où le "1" intervient, 2 autres cas où le "2" intervient et 1 autre cas où le "3" intervient. Il y a donc 5+4+3+2+1, soit 15 possibilités comme le tableau l'indique. D'autre part, le cas où la limite est 4 peut être vu différemment. Il y a 5 dominos où les nombres de points sont identiques des deux côtés du domino. Pour les constituer, il suffit de choisir 1 nombre parmi 5 (0, 1, 2, 3 ou 4) que l'on va ensuite dédoubler. Il reste alors les cas où les nombres de points des deux côtés du domino sont différents. On peut les générer en choisissant 2 nombres différents parmi les 5 disponibles. En résumé, il y a $C_1^5 + C_2^5$ possibilités. Or, $C_1^5 + C_2^5 = 5 + 10 = 15$ ce qui est conforme à la table. Dès lors, on peut réécrire la table en étendant les observations reliées au cas où la limite est 4 aux autres cas.

Limite	Nombre de dominos	Patron 1	Patron 2
0	1	1	---
1	3	1+2	$C_1^2 + C_2^2$
2	6	1+2+3	$C_1^3 + C_2^3$
3	10	1+2+3+4	$C_1^4 + C_2^4$
4	15	1+2+3+4+5	$C_1^5 + C_2^5$

On voit que le patron 1 colle bien aux résultats de la 2ième colonne et que le patron 2 (sauf la première ligne) est également cohérent avec les résultats de la 2ième colonne. On essaie ensuite de *généraliser* les patrons. Dans le cas du patron 2, il est clair que si la limite est n, on peut compter tous les dominos produits en 2 catégories: ceux ayant un nombre identique de points sur chaque partie d'un domino (il y en a C_1^{n+1} car les possibilités sont 0-0, 1-1, 2-2, ..., n-n) et ceux ayant des nombres différents de points sur chaque partie d'un domino (il y en a C_2^{n+1} car on choisit 2 nombres différents parmi n+1). Le nombre total de possibilités, selon le patron 2, est alors égal à $C_1^{n+1} + C_2^{n+1}$. En développant cette expression, on obtient:

$$C_1^{n+1} + C_2^{n+1} = \frac{(n+1)!}{1!\,n!} + \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Le patron 1 se généralise également. Pour passer de la ligne où la limite est 3 à la suivante, il faut ajouter tous les dominos que l'on peut faire avec "4", ce sont: 0-4, 1-4, 2-4, 3-4, 4-4. Il y en a 5. Il est clair que pour passer à la ligne où la limite est 5, il faudra ajouter 6 possibilités, les cas où le nombre de droite est fixé à 5 et le nombre de gauche varie entre 0 et 5 inclusivement. Il est évident que ce pattern se continue. Si la limite est n, le nombre de possibilités est égal à $1+2+3+\ldots+(n+1)$. Grâce aux connaissances des progressions arithmétiques, cette expression se réduit à $(n+1)(n+2)/2$. On obtient ainsi une formule identique à celle obtenue en généralisant le patron 2.

Il s'agit ensuite de *particulariser* la formule générale $(n+1)(n+2)/2$, obtenue par l'une ou l'autre des méthodes, en posant $n=6$. On obtient alors $(n+1)(n+2)/2 = (6+1)(6+2)/2 = 28$. On doit donc fabriquer 28 moules différents pour constituer le jeu de dominos décrit plus haut.

Nous pouvons également *faire un retour* sur notre solution. Les nombres de la deuxième colonne de la table précédente (1, 3, 6, 10, 15) peuvent éveiller chez l'élève des souvenirs du triangle de Pascal. D'ailleurs, l'expression $(n+1)(n+2)/2$ peut se réécrire sous la forme $(n+2)!/n!\,2!$ ce qui correspond à C_2^{n+2}. Ainsi, le nombre de possibilités à notre problème pourrait s'écrire simplement C_2^8 ce qui correspond effectivement à 28. Cela voudrait dire que $C_1^7 + C_2^7 = C_2^8$. L'élève peut être encouragé à généraliser ce résultat ce qui déboucherait sur l'égalité du triangle de Pascal. Ce problème est donc riche tant par les heuristiques impliquées que les résultats que l'on peut envisager lors d'un retour sur une solution initiale.

La métacognition

Certains comportements ou attitudes que nous pouvons déceler chez plusieurs de nos élèves semblent indiquer une certaine ignorance des principes de base de la résolution de problèmes, un manque de contrôle dans cette activité et des conceptions erronées de la résolution de problèmes. Ici, nous présentons et commentons des exemples de tels comportements ou attitudes.

Un problème (et non un exercice de routine) vient tout juste d'être proposé. L'élève se lance, tête baissée, dans une série de calculs plus ou moins pertinents. De façon évidente, cet élève ignore la nécessité de planifier le travail de résolution et l'existence des phases de résolution que nous propose Polya. Fait contrastant, le mathématicien, confronté à un problème, passe la majorité de son temps à "penser" (à analyser son problème, à évaluer ses approches) plutôt qu'à "faire" (des calculs ou appliquer des algorithmes). Il est conscient de l'importance des phases de résolution et du rôle de chacune.

Face à un problème, un élève s'acharne parfois à poursuivre une fausse route ou une route qui ne le mène nulle part. Or celui qui a développé une habileté à résoudre des problèmes prend souvent du recul et juge si ce qu'il a entrepris a des chances de déboucher sur une solution. Il s'interroge: Cela mène-t-il quelque part? Devrais-je essayer quelque chose d'autre? Entre la stratégie *A* et la stratégie *B*, laquelle devrais-je choisir? Si dans *x* minutes, je n'ai rien trouvé d'intéressant, j'essaierai telle autre stratégie.

Il arrive qu'un élève soumette à l'occasion d'un examen une solution correcte d'un problème mais elle est longue, sinueuse et compliquée alors que la question préparée par l'enseignant était simple et parfois assez directe. Cet élève possédait les connaissances nécessaires à une résolution simple du problème mais c'est ce qu'il a décidé d'utiliser qui a fait la différence.

Voici d'autres comportements observés ou réflexions entendues chez nos élèves:

- Si je ne trouve pas la solution d'ici dix minutes, j'abandonne.
- Voici la solution du prof au problème ... je l'avais pourtant trouvée mais je trouvais ça trop facile.
- Je ne vois pas pourquoi je dois expliquer ma réponse ... Il me semble que c'est évident. Le prof avec sa procédure et ses justifications ... À quoi ça sert?
- La résolution de problèmes et les maths, c'est pour les bollés.

Tout enseignant de mathématiques a certainement reconnu dans ce qui précède des attitudes et des comportements qu'il a pu observer régulièrement chez ses propres élèves. Ces phénomènes cachent mal, à un observateur quelque peu averti, des conceptions et des croyances négatives de la résolution de problèmes et des mathématiques. En outre, nous y décelons une activité intellectuelle mal contrôlée.

Il ne faudrait pas se surprendre que cela affecte, de façon significative, la performance d'un élève en mathématiques. Ces comportements et attitudes relèvent de la métacognition. Grossièrement, la métacognition pourrait se traduire par une réflexion sur la cognition, mais ce n'est évidemment pas assez précis pour notre propos. Pour Lester (1985)

> la métacognition réfère à une conscience de l'individu et au contrôle actif de ce dernier de ses propres processus cognitifs ainsi qu'à la régulation et l'orchestration des processus qui s'ensuivent.

Schoenfeld (1987b) introduit l'idée de métacognition comme suit

> Plus précisément, les recherches sur la métacognition ont porté leur attention sur trois catégories distinctes mais liées de comportement intellectuel.
>
> 1. La connaissance que l'on a à propos de nos propres processus de pensée. Avec quelle précision décrivons-nous notre façon de penser?
>
> 2. Contrôle ou autorégulation. Tenons-nous bien compte de tout ce que nous faisons quand (par exemple) nous résolvons un problème, et utilisons-nous bien (si tel est le cas) ces observations pour guider nos actions de résolution?
>
> 3. Croyances et intuitions. Quelles conceptions des mathématiques (et de la résolution de problèmes) nous accompagnent dans notre travail en mathématiques, et comment cela influence-t-il notre façon de faire des mathématiques?

Pour celui qui enseigne les mathématiques et la résolution de problèmes, il faut bien convenir que ce sont les deux dernières catégories qui présentent un plus grand intérêt. D'autre part, il faut savoir que la plupart des recherches récentes en résolution de problèmes ont été basées sur le modèle de résolution de Polya. Malheureusement, ce modèle ne tient pas compte, du moins explicitement, des processus métacognitifs. En conséquence, les recherches centrées sur le modèle de Polya ont largement ignoré les aspects métacognitifs. Comme le déplore Lester (1985)

> Toutefois, quiconque a enseigné ou étudié sérieusement les mathématiques est conscient qu'il y a beaucoup d'activités mentales sous-jacentes à l'application d'algorithmes et d'heuristiques. la métacognition peut justifier une partie significative de cette activité. En effet, l'échec de beaucoup de tentatives pour améliorer la performance des élèves en résolution de problèmes pourrait être imputable largement au fait que l'enseignement a mis trop l'accent sur le développement d'heuristiques et a virtuellement ignoré les activités de gestion nécessaires à la régularisation de l'activité de résolution.

Ajoutons quelques commentaires recueillis sur le sujet confirmant l'importance de la dimension métacognitive en résolution de problèmes. Kilpatrick (1985) affirme

> Dans un domaine donné, le succès en résolution de problèmes dépend de la possession d'un vaste savoir organisé du domaine en question, de techniques pour représenter et transformer les problèmes et de processus métacognitifs pour contrôler et guider la performance de résolution.

Enfin, Schoenfeld (1985) ajoute

> La question de sélectionner laquelle (stratégie) utiliser (et quand) devient un point critique. Si celui qui résout un problème ne dispose pas de moyens efficaces d'effectuer de tels choix, ou de récupérer des mauvais choix, le potentiel des heuristiques peut être dilué à un point tel que leur impact est négligeable.

Pour devenir habile en résolution de problèmes, on a à réfléchir sur ses propres actions de résolution et en tirer des leçons pour le futur. Pour cela, il faut prendre du recul, se regarder agir et réfléchir sur ses gestes.

D'abord, une personne habile en résolution de problèmes utilise efficacement ce qu'elle connaît. Par contre, une personne qui n'a pas une bonne idée de ce qu'elle connaît aura de la difficulté à devenir performante en résolution de problèmes. Ensuite, quand on résout un problème, il faut s'assurer de le comprendre avant de pousser plus loin la résolution et s'interroger sur le déroulement des événements durant la résolution. Il faut voir à l'allocation des ressources, décider quoi utiliser, quoi faire, pour combien de temps. Ce n'est pas seulement ce que l'on connaît qui compte mais ce que l'on décide d'utiliser. Il faut être conscient des choix que l'on fait et des raisons qui motivent ces choix. Nos actions de résolution doivent donc être régularisées par des mécanismes de contrôle.

Au fil des années, les élèves développent des conceptions, des croyances et des attitudes face à la résolution de problèmes et aux mathématiques. Dans bien des cas, ces conceptions et croyances sont complètement erronées, et peuvent avoir un effet négatif sur leur comportement et leur performance autant en mathématiques qu'en résolution de problèmes. Les derniers paragraphes ont mis l'accent sur l'importance de la métacognition dans l'enseignement des mathématiques et de la résolution de problèmes. Nous y reviendrons lorsque nous aborderons le thème 3.4 "L'enseignement de la résolution de problèmes: un aperçu".

3.3 La résolution de problèmes: pourquoi?

Un système d'éducation doit permettre à chaque individu de développer ses capacités afin qu'il puisse apporter sa contribution et relever les défis auxquels est confrontée la société dans laquelle il vit. Notre système d'éducation a répondu aux besoins de l'époque industrielle en mettant l'importance sur la transmission de connaissances. Devant la surabondance de l'information, cette mission devient impossible et irrémédiablement vouée à l'échec. Il est alors souhaitable que notre système d'éducation adopte un modèle autre que le modèle industriel. L'école doit aider l'élève à développer, à comprendre ses propres processus d'apprentissage, à se doter de stratégies pour augmenter l'efficacité de ces processus et à développer une confiance en ses capacités. Dans ce contexte, l'étude des mathématiques où la résolution de problèmes occupe une place appropriée constitue un terrain de prédilection à l'éclosion des habiletés requises dans le futur. Rappelons qu'en 1980, le N.C.T.M. émettait des recommandations quant aux tendances de l'enseignement des mathématiques dans les années 80, la recommandation primordiale étant:

> La résolution de problèmes doit être la préoccupation principale de l'enseignement des mathématiques dans les années 80.

La résolution de problèmes a même débordé le cadre des mathématiques. Comme le cite Schoenfeld (1987c):

> De plus, le mouvement de résolution de problèmes ne se limite plus à l'éducation mathématique, il est quasiment universel. Durant les cinq dernières années, le travail de Polya sur la résolution de problèmes a été cité dans American Political Science Review, Annual Review of Psychology, Artificial Intelligence, Computer and Chemistry, Computers and Education, Discourse Processes, Educationnal Leadership, Higher Education, Human Learning, et plusieurs autres publications.

Lester (1985) confirme l'importance de la résolution de problèmes:

> Le but ultime de l'enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques est de rendre les élèves aptes à penser par eux-mêmes.

Résolution de problèmes et besoins de la société

À l'aube de l'an 2000, il est primordial de réaliser que toute personne devra être "lettrée" en mathématiques pour être un participant dynamique et responsable dans la société technologique de demain. Cette société exigera de ses membres qu'ils possèdent les capacités d'évoluer, de s'ajuster aux changements qui vont inévitablement s'y produire. Cette compétence va bien au-delà des strictes connaissances. Notre société a et aura besoin d'individus habiles à utiliser leurs connaissances dans des situations nouvelles, à les adapter, à les transférer. Ces habiletés vont dans le même sens que celles que nous voulons développer en résolution de problèmes. Il y a définitivement des habiletés intellectuelles, des formes de pensée, des attitudes que l'étude des mathématiques et de la résolution de problèmes permettent de développer et qui seront très en demande dans la société de l'an 2000. Un véritable engagement en ce sens devient de plus en plus urgent.

Résolution de problèmes et formation fondamentale

Souvent au collégial, à l'intérieur des cours de mathématiques, on a mis l'accent sur l'acquisition de connaissances. Pourtant, des cours de mathématiques qui auraient comme but unique de fournir des éléments de connaissance à l'élève en oubliant le savoir-faire et le savoir-être, dimensions essentielles en mathématiques, sont voués à l'échec comme contribution valable à la formation fondamentale, particulièrement à l'aube de l'an 2000.

Nous partageons le point de vue de D'Amour (1988) lorsqu'elle affirme qu'il ne va pas de soi que l'enseignement actuel des mathématiques apporte une contribution significative à la formation fondamentale de l'élève.

> Les professeurs de mathématiques identifient assez facilement la contribution de leur discipline à la formation fondamentale: rigueur, abstraction, rationalité, organisation, etc. Cependant, ils semblent souvent croire que tout enseignement des mathématiques, quelle que soit sa forme, permet automatiquement d'atteindre ces objectifs. Cela me semble une grave erreur. Je suis convaincue que la contribution des mathématiques à la formation fondamentale, comme celle de toute autre discipline d'ailleurs, est une contribution potentielle et que certaines stratégies pédagogiques permettent, plus que d'autres, d'actualiser ce potentiel.

La résolution de problèmes est une habileté fondamentale qui permet d'augmenter la contribution des mathématiques à la formation fondamentale. On a pu entrevoir précédemment (au thème 3.1) que les heuristiques ou stratégies de résolution de problèmes sont variées. À l'intérieur de ces stratégies, de nombreuses habiletés intellectuelles sont sollicitées: particulariser, généraliser, abstraire, concrétiser, penser de façon convergente, penser de façon divergente, raisonner inductivement, raisonner déductivement, catégoriser, classifier, analyser, conjecturer, conceptualiser, synthétiser, penser de façon critique, penser de façon créative. Ainsi, l'apprentissage des mathématiques, par le biais de l'approche par résolution de problèmes, favorise non seulement le développement d'habiletés intellectuelles fondamentales mais aussi des interventions sur le plan de la métacognition qui permettent l'intégration de ces habiletés en un tout cohérent et efficace.

Notre choix de stratégies pédagogiques doit contribuer de façon significative à la formation fondamentale. Référons-nous à la définition de l'*Édition commentée du Règlement sur le régime pédagogique du collégial*. Selon ce texte, la formation est fondamentale si «elle entend contribuer au développement intégral dans toutes ses dimensions» (ce que l'on appelle l'extension) et surtout, si «elle vise à faire acquérir les assises, les concepts et les principes de base des disciplines et des savoir-faire qui figurent au programme de l'étudiant, quelle que soit son orientation» (ce qu'on appelle la profondeur).

L'enseignement des mathématiques, soutenu par l'approche par résolution de problèmes, permet la réalisation de l'extension (visée par la définition précédente) car elle touche entre autres les habiletés de réflexion, de communication et d'apprentissage.

De plus, l'approche par résolution de problèmes comme outil d'exploration, de conceptualisation et d'organisation des connaissances constitue un moyen d'apprentissage qui en assure la profondeur car cette approche pénètre au coeur même de la discipline mathématique et d'une certaine façon de toutes les disciplines scientifiques. Dans une pédagogie renouvelée intégrant l'approche par résolution de problèmes, les mathématiques verront leur importance décuplée et leur contribution à la formation fondamentale sera d'une envergure dépassant largement les cadres de cette discipline.

L'habileté en résolution de problèmes augmente la confiance en soi

Quiconque a travaillé avec des élèves dans des classes de mathématiques sait que des considérations de nature affective influencent de façon significative leur performance. Comme l'affirme Silver (1985):

> Quand les élèves entreprennent des tâches mathématiques, particulièrement celles constituées de problèmes, ils ne se présentent pas comme des êtres purement cognitifs.

McLeod (1985) ajoute:

> Toutefois, le point de vue affectif se présente inévitablement quand on considère la performance humaine dans des tâches mathématiques qui ne sont pas routinières.

Il admet que la performance en résolution de problèmes en mathématiques est influencée par des variables de nature affective. L'élève qui s'estime faible en résolution de problèmes et qui entretient une image négative de lui-même dans ce domaine aura une performance en conformité de ses attentes. Par ailleurs, l'élève qui a développé une habileté à résoudre des problèmes et qui en a conscience, fait montre d'attitudes et de comportements qui font preuve d'une force et d'une richesse intellectuelle.

Il accepte volontiers de s'engager dans une activité de résolution de problèmes. Il manifeste une forme d'indépendance en acceptant de travailler sur un problème sans demander d'aide. Il persiste dans ses tâches de résolution. Il connaît, pour l'avoir déjà éprouvé, le sentiment de satisfaction intense que l'on éprouve quand on a résolu un problème difficile. Il accepte de prendre des risques. Il sait évaluer ses chances de succès et a confiance en ses capacités. Quand les choses ne tournent pas rond, il en est conscient et n'hésite pas à réorienter son approche. Il contrôle son anxiété quand le processus de résolution piétine.

Comme le soutient Schoenfeld (1987a):

> ... une acceptation tacite à tolérer un chaos temporaire au service d'un but à long terme constitue une part de la compétence du mathématicien.

3. La résolution de problèmes

Nul doute qu'il faut développer chez nos élèves une confiance réelle en leurs capacités et leurs habiletés mathématiques et particulièrement en celles de résolution de problèmes. Malheureusement, pour certains élèves, il y a un cercle vicieux: -manque d'intérêt-échec-manque d'intérêt- En effet, face à un problème, un élève peu confiant en lui-même manque de curiosité et de motivation pour rechercher une solution; il a alors peu de chance d'en trouver une. Dans ce domaine, les résultats sont souvent proportionnels aux efforts fournis. Pour briser un tel cercle vicieux chez les élèves, il est nécessaire d'éveiller leur curiosité scientifique et de susciter leur intérêt (entre autres en leur proposant des problèmes attrayants); c'est le moteur qui incite à la recherche et qui permet le succès.

Les élèves doivent enfin attacher une certaine valeur à l'activité intellectuelle que constitue la résolution de problèmes. Des efforts importants de sensibilisation doivent être faits auprès des élèves relativement à l'importance de cette activité. Leurs croyances sur la résolution de problèmes et sur leurs propres compétences en ce domaine, tout cela relève de la métacognition.

Résolution de problèmes et mathématiques: des liens indissociables et essentiels

Nous l'avons déjà noté mais il convient de le rappeler à nouveau: on ne peut imaginer qu'un élève suive un cours de mathématiques sans être confronté à la tâche de résoudre des problèmes. Les manuels scolaires comportent des séries de problèmes et d'exercices soumis à l'élève. Cela apparaît tout à fait normal tant aux élèves qu'aux enseignants. On ne peut étudier sérieusement les mathématiques sans résoudre des problèmes. Mais les liens entre les mathématiques et la résolution de problèmes sont infiniment plus forts que ce que laissent entrevoir nos dernières affirmations: on ne peut étudier, produire ou appliquer les mathématiques sans obligatoirement résoudre des problèmes.

La littérature sur la résolution de problèmes en mathématiques présente tout un éventail d'affirmations établissant des liens indissolubles entre mathématiques et résolution de problèmes. Nous en avons sélectionné quelques-unes.

Dans le rapport Cockcroft de 1982, on affirme que:

> L'habileté à résoudre des problèmes est au coeur des mathématiques.

De son côté, Thompson (1985) nous dit que:

> le développement du savoir mathématique est basé sur la résolution de problèmes.
>
> apprendre les mathématiques, c'est apprendre la résolution de problèmes en mathématiques.

Pour sa part, Kilpatrick (1985) conçoit que:

> Les mathématiques ne sont pas seulement les problèmes célèbres sur lesquels les grands mathématiciens ont travaillé; toutes les mathématiques sont créées dans un processus de formulation et de résolution de problèmes.

Relevons maintenant une affirmation de Polya (1967) tirée de *La découverte des mathématiques*

> En mathématiques, le savoir-faire se traduit en une aptitude à résoudre des problèmes, à construire des démonstrations, et à examiner d'un oeil critique solutions et démonstrations. Dans ce domaine, le savoir-faire est beaucoup plus important que la simple possession du savoir.

Enfin, selon Schoenfeld (1985)

> Pour faire et comprendre les mathématiques, il faut beaucoup plus que simplement maîtriser la matière. Ce que l'on fait avec les éléments à sa disposition contribue, dans une large mesure, au succès en résolution de problèmes. ... Notre discussion indique que les processus de résolution de problèmes sont absolument centraux dans toute discussion de la performance mathématique.

Les affirmations qui précèdent montrent bien qu'un lien très fort existe entre les mathématiques et la résolution de problèmes. Mais il y a plus. Les différentes stratégies de résolution de problèmes, qui rappelons-le sont indépendantes de tout contenu spécifique, peuvent être mises en évidence et illustrées plus facilement en mathématiques que dans bien d'autres domaines de connaissances, en raison de la multiplicité, de la richesse des situations ainsi que de la clarté des contextes dans lesquels ces problèmes se posent. Les mathématiques constituent donc un terrain fertile au développement des capacités de résolution de problèmes.

En outre, on trouve en mathématiques un domaine de choix pour utiliser l'habileté à résoudre des problèmes. En effet, on y rencontre beaucoup de problèmes, on développe des concepts, on élabore des méthodes et des algorithmes, on démontre des résultats dans le but de les utiliser dans diverses situations: ce sont des situations potentielles de problèmes. C'est dans la résolution de problèmes que l'activité mathématique prend tout son sens. On peut poser des hypothèses, faire des conjectures, construire des modèles, prouver, inventer des contre-exemples, construire et comparer des algorithmes, bref, produire des raisonnements articulés. Dans une multitude de situations, l'élève peut développer le sentiment réel de dominer ou de maîtriser le contenu et d'acquérir une certaine autonomie dans le processus d'acquisition des connaissances.

La résolution de problèmes: outil de construction et d'organisation des connaissances

Lire le manuel d'instruction d'un programme de traitement de textes est une chose, mais c'en est une autre bien différente que d'utiliser le logiciel pour produire un document. Ce n'est que sur le "terrain" lors d'utilisations réelles que la plupart des gens commencent à comprendre comment le programme fonctionne réellement en solutionnant les problèmes qu'ils rencontrent inévitablement. Le degré d'efficacité de l'apprentissage est souvent directement proportionnel au niveau d'activité de l'apprenant.

3. La résolution de problèmes

Proposer des problèmes à des élèves pourra avoir comme effet de les motiver, de les intéresser, de les inciter à l'action dans le but d'acquérir des connaissances et de développer des habiletés. Vue sous cet angle, la résolution de problèmes peut être considérée comme un moyen privilégié d'accroître les connaissances des élèves et leurs capacités intellectuelles. Nous croyons que la résolution de problèmes doit occuper une place importante dans les cours de mathématiques parce que "construction et organisation des connaissances" et " résolution de problèmes" sont intimement liées.

Pour qu'un nouvel élément mathématique (un concept, un résultat, une méthode) soit bien abordé et adéquatement intégré par l'élève, il est souhaitable qu'il fasse l'objet d'une activité d'exploration qui se traduit habituellement dans le contexte des mathématiques par des situations de résolution de problèmes. Historiquement, on constate que beaucoup de concepts mathématiques ont pris naissance dans le désir d'éclaircir des situations problématiques. En mathématiques, les problèmes constituent donc une source de développement du savoir. Thompson (1985) exprime le point de vue suivant:

> Le trait essentiel de la construction du savoir mathématique est la création de relations et la création de relations est la marque de la résolution de problèmes en mathématiques.

Selon Branca (1980), l'enseignement des mathématiques doit refléter cette réalité:

> Les problèmes sont le plus efficacement résolus par l'application de la théorie appropriée et le contexte où la théorie se développera le plus vraisemblablement vient en réponse au désir de résoudre des problèmes intéressants. Donc, les deux activités de construction de structures et de résolution de problèmes sont hautement complémentaires et, en effet, dépendent l'une de l'autre dans tout curriculum bien équilibré.

Commentant une étude de Lesh, Landeau & Hamilton datant de 1983 et portant sur des situations de résolution de problèmes réalistes faisant intervenir des contenus mathématiques, Pace (1987) cite les passages suivants:

> ... il y a une interaction dynamique entre le contenu des idées mathématiques et les processus utilisés pour résoudre des problèmes basés sur ces idées. ... Applications et résolution de problèmes jouent un rôle important dans l'acquisition d'idées mathématiques fondamentales. Nous croyons que les applications et la résolution de problèmes ne devraient pas être considérées seulement après que l'apprentissage ait eu lieu, mais plutôt qu'elles peuvent et devraient être utilisées comme contexte à l'intérieur duquel se déroule l'apprentissage des idées mathématiques.

On peut croire que cette façon d'apprendre par l'intermédiaire de problèmes se limite aux mathématiques. Mais, s'il faut se fier aux théories de Piaget, sa portée pourrait être beaucoup plus grande. Thompson (1985) interprète ainsi la théorie de l'équilibre (adaptation) de Piaget pour exprimer l'importance des problèmes dans l'apprentissage.

> Sa théorie de l'équilibre qui affirme que l'épigénèse de la connaissance vient de la tension entre l'accommodation et l'assimilation dit essentiellement que l'on apprend en solutionnant des problèmes.

Et que peut nous offrir la résolution de problèmes dans l'organisation des connaissances? Voyons d'abord comment ces dernières sont organisées dans la mémoire à long terme.

Selon plusieurs théories, l'information est organisée en réseaux conceptuels représentés par des noeuds et des lignes reliant ces noeuds. Les noeuds représentent les concepts et les lignes, des associations significatives entre les concepts. On peut dire que l'on a la compréhension de quelque chose quand on l'a intégrée de façon significative à la structure existante de sa connaissance. Nous avons déjà signalé précédemment que des connaissances bien organisées constituent un atout en résolution de problèmes. Mais la résolution de problèmes peut aussi contribuer à l'organisation des connaissances de l'élève. Précisons.

- Travailler un problème sur un sujet mathématique enrichit la connaissance que l'on a de ce sujet.
- Des problèmes judicieusement choisis peuvent faire prendre conscience à l'élève des conceptions erronées qu'il aurait pu développer d'un élément mathématique.
- Un problème choisi pertinemment peut aider l'élève à donner du sens à un élément mathématique.
- Proposer aux élèves des problèmes «prototypes» pour amorcer l'apprentissage de concepts ou d'habiletés leur facilitera la tâche d'appliquer ces éléments à des situations nouvelles qu'ils rencontreront plus tard puisqu'alors

> ... la représentation mentale que se fait l'élève de la connaissance mathématique consisterait probablement en un réseau propositionnel et procédural bien organisé et composé d'une part des concepts et habiletés particulières et d'autre part de riches connections entre les éléments de ce savoir et les situations de problèmes «prototypes» auquel ce savoir est applicable. (Silver (1987))

Il est important, comme Silver le recommande, de considérer des cas pour lesquels la procédure ou le concept ne s'appliquent pas, tels des contre-exemples ou des cas sortant vraiment de l'ordinaire.

3.4 L'enseignement de la résolution de problèmes: un aperçu

Tout enseignant qui entretient chez ses élèves des attentes dans le domaine de la résolution de problèmes doit être conscient au départ que la tâche sera ardue. Kilpatrick (1985) le reconnaît:

> Les recherches des 25 dernières années suggèrent qu'à la question "Comment la résolution de problèmes est-elle apprise?", la meilleure réponse est probablement "lentement et avec difficulté".

L'enseignement de la résolution de problèmes doit tenir compte de cet état de faits. Actuellement, on connaît peu de choses sur la résolution de problèmes comme l'affirment Heller et Hungate (1985):

> La recherche nous renseigne beaucoup moins sur la façon d'enseigner la résolution de problèmes que sur ce qu'il faut enseigner et sur la façon de déterminer ce qu'il faut enseigner.

En fait, nous allons procéder d'une façon semblable. D'abord, dans le thème "Des dimensions essentielles", nous allons nous attarder aux différents éléments sur lesquels devrait porter un enseignement en résolution de problèmes. Par la suite, le thème "Divers moyens pédagogiques" portera essentiellement sur les moyens pédagogiques à mettre en oeuvre pour permettre à l'élève d'améliorer ses habiletés en résolution de problèmes.

Des dimensions essentielles

On a constaté, après observation des experts en résolution de problèmes dans un domaine donné, qu'ils possèdent:

- Des connaissances bien organisées du sujet (concepts, principes, procédures, modes de représentation)
- Des stratégies de résolution
- Des procédures de contrôle dans le choix des connaissances et des stratégies

L'enseignement de la résolution de problèmes doit refléter cet état de faits.

Pour Schoenfeld (1985), l'enseignement de la résolution de problèmes doit s'organiser autour des dimensions suivantes:

- Les connaissances spécifiques de l'élève
- Les heuristiques
- Le contrôle
- Les croyances et attitudes de l'élève

Développons chacune de ces dimensions.

Les connaissances spécifiques de l'élève

Dans un domaine mathématique spécifique, connaître les notations, les définitions, les modes de représentations, les résultats, les procédures de calcul, les algorithmes, les façons de procéder acceptées dans ce domaine s'avèrent nécessaires aux activités de résolution de problèmes.

Dans le choix des problèmes proposés aux élèves, l'enseignant doit s'assurer que ceux-ci disposent des connaissances spécifiques nécessaires à leur résolution. Ici, il faut souligner que l'activité de résolution de problèmes réserve des surprises à l'enseignant. Souvent les élèves trouveront des solutions tout à fait originales ne faisant aucunement intervenir les connaissances spécifiques que l'enseignant avait considérées. Il faut accepter de telles situations et même les promouvoir. Mais, règle générale, les connaissances antérieures doivent être bien organisées et facilement accessibles. Comme le dit Polya (1967):

> Un bagage de connaissances bien rangé et bien organisé constitue un avantage important pour le chercheur. Une bonne organisation qui rend la connaissance aisément disponible, peut avoir plus d'importance que l'étendue de cette connaissance.

Silver (1987) fait valoir un point de vue semblable:

> Comme nous l'avons vu, les informations de la mémoire à long terme jouent un rôle important dans les théories de résolution de problèmes. Parce que l'accès efficace à l'information peut dépendre de la façon dont l'information est organisée dans la mémoire à long terme, les différences de succès en résolution de problèmes peuvent être attribuables aux différences d'organisation des savoirs chez ceux qui résolvent des problèmes.

Les heuristiques

Il ne fait pas de doute qu'un enseignement de la résolution de problèmes doit viser à pourvoir l'élève d'un riche bagage d'heuristiques. Ces heuristiques, ou stratégies générales de résolution présentent la qualité et le défaut d'être "générales". La qualité réside dans le fait qu'elles s'utilisent dans une variété de situations et de domaines distincts. Par contre, leur défaut (surtout pour l'enseignement) consiste à ne pas être assez précis. En effet, une heuristique peut permettre des interprétations ambiguës. D'ailleurs, Schoenfeld (1985) présente une heuristique comme:

> ... une étiquette attachée à une famille de stratégies plus spécifiques intimement liées.

Le lecteur intéressé par le sujet pourra avantageusement consulter la source mentionnée. Ce qu'il faut retenir c'est que le professeur aura comme tâche de rendre plus explicites à ses élèves les heuristiques qu'il décidera d'exploiter.

Le contrôle

Grossièrement, le contrôle en résolution de problèmes fait référence aux mécanismes de gestion des ressources cognitives et stratégiques dans une activité de résolution de problèmes. Un élève doté de bons mécanismes de contrôle présentera les comportements (pas nécessairement observables) suivants:

- Il n'entreprend pas d'action de planification (deuxième phase de résolution selon Polya) avant d'avoir compris le problème (première phase).
- Il est conscient des choix qu'il a faits et en estime les conséquences.
- Ses phases de résolution se déroulent dans un ordre logique.

- Il se conditionne à être concentré quand des calculs complexes sont exigés par l'exécution du plan de résolution.
- Quand il fait un mauvais choix de stratégies ou quand il est bloqué, il le réalise et réagit.
- Après la résolution, il réfléchit à ses bons et à ses mauvais coups.

Par contre, si le contrôle fait défaut, l'élève adoptera d'autres comportements :
- Il sélectionne mal les éléments de connaissance dont il dispose.
- Il fait le choix d'une stratégie et ne la remet plus en question.
- Il s'active à une tâche sans savoir comment il utilisera le produit de cette action (s'il l'utilise).
- Il exécute ses actions de résolution dans un ordre illogique.
- L'élève perd le fil du déroulement de la résolution.

Le contrôle en résolution de problèmes mérite l'attention du professeur. En parlant du contrôle (et des attitudes des élèves en rapport avec les mathématiques et la résolution de problèmes), Schoenfeld (1987b) considère que :

> Mon travail, en partie, est de convaincre les élèves de l'importance de ces aspects de la pensée mathématique.

Comme nous l'avions énoncé précédemment, le contrôle relève de la métacognition. McLeod (1985), de son côté, affirme :

> Les élèves ont besoin d'être conscients des décisions d'ordre métacognitif qu'ils prennent en solutionnant des problèmes. Amener ces décisions hors de l'inconscient vers le domaine de la planification consciente semble être une partie importante de la résolution de problèmes.

L'enseignant peut contribuer à développer chez chacun de ses élèves des capacités métacognitives notamment celles relatives au contrôle en l'amenant à s'engager, alors qu'il résout un problème, dans une réflexion critique sur les actions qu'il entreprend et les décisions qu'il prend. Une manifestation de cette réflexion est celle d'un dialogue interne : c'est ce moniteur qui décrit, questionne, analyse, critique, évalue chaque étape du processus et en assure ainsi le contrôle.

Les croyances et les attitudes de l'élève

Les idées qu'un élève entretient des mathématiques et de la résolution de problèmes influencent sa performance en mathématiques. Comme l'affirme Schoenfeld (1987b) et nous avons tendance à lui donner raison :

> Je soutiens que, largement comme résultat de leur éducation, plusieurs élèves développent des croyances relativement à ce que sont les mathématiques qui sont totalement erronées et que ces croyances ont un effet négatif sur leur comportement en mathématiques.

Ailleurs, il ajoute (Schoenfeld (1987b)):

> Le fait de connaître beaucoup de mathématiques ne rend pas nécessairement les élèves meilleurs si leurs croyances les empêchent d'utiliser leurs connaissances.

Et McLeod (1985) de renchérir:

> Les élèves peuvent ne pas avoir conscience combien leurs sentiments de la résolution de problèmes limitent les processus cognitifs ou les stratégies de résolution de problèmes qu'ils utilisent.

Nous avons précédemment cité des exemples de croyances erronées et d'attitudes négatives que présentent souvent nos élèves (voir "La métacognition"). Nous aimerions en citer de nouvelles dont certaines ont été recueillies au fil de nos lectures.

- Tous les problèmes de mathématiques peuvent être solutionnés par l'application d'une ou de quelques formules.
- La difficulté d'un problème est directement proportionnelle à la longueur de son énoncé.
- La réponse est beaucoup plus importante que la solution.
- Solution et réponse sont synonymes.
- Comme l'élève voit souvent un problème comme une tâche scolaire plutôt qu'un défi intellectuel, il s'agrippe à la réponse comme pour échapper à la tâche le plus tôt possible. (Kilpatrick (1985))
- La majorité des étudiants américains du secondaire croient que les mathématiques sont souvent une affaire de mémorisation, qu'il n'y a habituellement qu'une seule bonne façon de résoudre un problème de mathématiques et que ces problèmes devraient être résolus en quelques minutes. (Silver (1987))

Les quatre prochains éléments nous sont amenés par Schoenfeld (1985, 1987b):

- Plusieurs élèves en arrivent à croire que les mathématiques scolaires consistent à maîtriser des procédures formelles qui sont complètement coupées de la vraie vie, de la découverte et de la résolution de problèmes.
- Seulement les génies sont capables de découvrir les mathématiques.
- Si vous comprenez la matière, alors tout problème proposé peut être résolu en peu de temps.
- Les mathématiques formelles ont peu ou rien à faire avec la pensée réelle ou la résolution de problèmes.

Dans l'enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques, il faut donc prendre en considération la dimension métacognitive liée aux croyances et attitudes des élèves envers les mathématiques et la résolution de problèmes. Il ne s'agit pas de considérer l'élève comme une table rase sur laquelle s'empilent les connaissances mais plutôt de le convaincre de l'importance des aspects métacognitifs et de tenter de modifier ses croyances erronées. Il lui faut également tenir compte de ce que pense l'élève de sa propre capacité de résolution de problèmes. À ce sujet, Kilpatrick (1985) affirme:

> Aucun programme d'enseignement ne peut connaître de succès s'il ne prend pas en considération les attitudes négatives des élèves et les perceptions qu'ils ont d'eux-mêmes en résolution de problèmes.

Divers moyens pédagogiques

Même si elle est un peu avare sur le sujet, la littérature nous fournit quand même certaines indications et contre-indications concernant des procédures à utiliser en enseignement de résolution de problèmes. D'abord, débutons par une mise en garde. Certains environnements d'apprentissage en résolution de problèmes n'amènent pas des résultats significatifs. Kilpatrick (1985) nous le confirme :

> Certaines approches d'enseignement tentent de plonger l'élève dans un environnement de problèmes, présumant que les techniques seront absorbées par un processus rarement rendu explicite, une sorte d'osmose. ... La pratique consistant à résoudre de nombreux problèmes apparaît comme une condition nécessaire pour améliorer les habiletés de résolution de problèmes, mais sa suffisance apparaît improbable.

L'enseignant doit donc intervenir d'une manière tangible pour développer de façon significative les capacités de résolution de problèmes chez ses élèves. On apprend par imitation du professeur (ou d'un élève) mais on ne peut apprendre à servir au tennis ou à jouer du piano simplement en observant un expert. Il en va de même de la résolution de problèmes; le professeur a un rôle important à jouer comme modèle auprès de l'élève mais cela ne suffit pas. L'élève doit prendre une part active à son apprentissage en s'impliquant dans les activités de résolution de problèmes. L'élève peut également développer ses capacités de résolution de problèmes par la réflexion. Dewey a déjà affirmé que l'on apprenait dans l'action mais il serait plus juste de dire comme Papert que l'on apprend dans l'action et par la réflexion sur cette action. L'implication de l'élève ne s'arrête donc pas à sa participation active aux activités de résolution de problèmes mais doit se poursuivre dans la réflexion sur son propre processus de résolution de problèmes. L'enseignant doit aider l'élève à développer cette attitude de réflexion.

En cohérence avec les observations précédentes, nous croyons que l'enseignement en résolution de problèmes peut s'articuler autour de divers modes pédagogiques se concrétisant par :

- des interventions du professeur avec toute la classe,
- du travail en petits groupes,
- du travail individuel.

Nous allons élaborer chacun de ces éléments.

Interventions du professeur avec toute la classe

À l'occasion des rencontres avec toute sa classe, le professeur peut faire des interventions moins directives : présenter des exemples d'utilisation d'heuristiques, exposer aux élèves le sens et la portée de ces heuristiques. Il relève du professeur d'aider les élèves à intégrer les heuristiques à leur arsenal de résolution. C'est ce qu'explique Silver (1987) :

> Les professeurs doivent modéliser, au profit des élèves, les procédés de sélection et d'exécution des heuristiques utiles telles que dessiner un diagramme, examiner les cas extrêmes ou analyser un problème plus simple. Afin d'incorporer ces processus à leur répertoire de résolution de problèmes, les élèves doivent voir ces processus utilisés et se les voir expliqués. La démonstration et la modélisation doivent insister non seulement sur ce qui est fait mais aussi pourquoi on le fait.

Il est bon que l'enseignant présente des solutions "toutes faites" à ses élèves mais pas trop coulantes, plus près d'une réflexion sur le processus. À ce sujet, Schoenfeld (1987b) nous fait cette remarque:

> Quand nous écrivons au tableau la solution d'un problème, nous présentons habituellement le résultat de nos réflexions d'une façon claire et nette. En fait, présenter les choses proprement fait partie de notre professionnalisme. Nous pouvons travailler fort longtemps à résoudre un problème difficile, mais l'idée est de le "saisir correctement" et ensuite de présenter un produit fini. Malheureusement, ce professionnalisme produit des retombées involontaires. En présentant une solution polie, nous obscurcissons souvent le processus qui l'a produite, donnant ainsi l'impression à ceux qui étudient le sujet que ce doit être facile.

Heller et Hungate (1985) nous font la même recommandation:

> Les enseignants devraient être capables de communiquer à la classe certains aspects du savoir en résolution de problèmes, mais seulement s'ils modélisent d'une façon suffisamment détaillée le processus de construction d'une solution. Trop souvent, les enseignants passent directement de la lecture de l'énoncé d'un problème à l'écriture au tableau d'une solution déjà complète, omettant les analyses qualitatives, les décisions stratégiques, et les explications du pourquoi et du comment de chaque étape réalisée.

Des activités de résolution de problèmes avec toute la classe sont bien sûr prévues dans notre modèle. Le rôle du professeur sera précisé lors de la description des éléments du modèle à la prochaine section.

Travail en petits groupes

Il est bénéfique pour les élèves que l'on crée des occasions de travailler à résoudre des problèmes en petits groupes de 2, 3 ou 4 membres. Confronté à un problème, le groupe peut générer plus d'une approche et ces différentes approches doivent être évaluées, critiquées, expliquées, comparées. Celui qui a avancé une idée se sent obligé de l'expliquer, de la défendre. En de telles circonstances, le groupe a des choix à faire, des décisions à prendre. De bonnes habitudes de résolution et de contrôle peuvent se développer naturellement dans un tel environnement. Resnick et Nelson-LeGall (1987) proposent un intéressant point de vue sur la résolution de problèmes en collaboration:

Les tâches de résolution de problèmes faites en collaboration établissent plusieurs conditions qui pourraient être importantes dans le développement d'une compétence mathématique. Le contexte social de collaboration fournit des occasions de modéliser des stratégies de penser efficaces. Les penseurs plus habiles (souvent l'enseignant, mais parfois des élèves plus avancés) peuvent montrer des façons souhaitables d'attaquer des problèmes et de construire des arguments. Cela permet également de critiquer et de formuler la pensée parce que les processus de pensée autant que les résultats deviennent visibles. Le contexte social est aussi motivant; étant encouragés à essayer de nouvelles approches, des approches plus actives et se sentant soutenus socialement, même dans les succès partiels, les élèves en viennent à se considérer aptes à s'engager dans des activités d'interprétation et de construction de sens. Enfin, la résolution de problèmes en collaboration peut fournir une sorte d'échafaudage à un élève initialement démuni. Plutôt que de penser de façon parcellaire et isolée, faisant que la signification de chaque petite portion n'est pas visible, un groupe résout un problème ensemble. De cette façon, des novices peuvent participer à la résolution du problème et peuvent, si tout se déroule bien, éventuellement prendre en charge par eux-mêmes le travail en tout ou en partie.

En particulier, le travail de résolution à deux s'avère prometteur. Silver (1987) nous apprend que:

> Une fructueuse technique est de faire résoudre les problèmes en pairant les élèves, l'un résolvant le problème et l'autre jouant le rôle de moniteur-contrôleur. Le rôle de ce dernier est de poser des questions pour clarifier l'activité de résolution de celui qui résout. Après avoir résolu un ou plusieurs problèmes, les élèves peuvent interchanger leurs rôles.

Le dialogue de résolution des deux élèves s'apparente à la vision que se fait McLeod (1985) (s'inspirant de J.W. Rigney) de celui qui résout seul un problème. Ainsi McLeod commente:

> ...divise le fonctionnement de celui qui résout un problème en deux parties, l'«opérant» et le «surveillant». Le premier remplissant les demandes du second; l'opérant exécute les ordres et le surveillant procure récompenses et punitions dépendant du déroulement des choses.

Ce dédoublement de celui qui résout un problème résulte de l'intériorisation chez cet individu des modes de résolution en petits groupes. C'est en tout cas la position que défend Vygotsky, psychologue soviétique. À ce sujet, Schoenfeld (1987b) nous apprend que:

> En travaillant seul, l'enfant peut fonctionner jusqu'à un certain niveau. Travaillant en collaboration avec des pairs, ou encore sous la surveillance d'adultes, l'enfant peut fonctionner à un niveau plus élevé. Ce terrain intermédiaire que l'élève peut atteindre avec une

certaine aide mais pas par lui-même est la «zone de développement proximal». La thèse de Vygotsky veut que l'on acquière des habiletés de haut niveau en pratiquant ces habiletés dans la «zone de développement proximal» et ensuite en intériorisant ces habiletés, c'est-à-dire, en maîtrisant ces habiletés pour lesquelles, à un moment donné, on a eu besoin d'aide. Cette perspective fournit une forte justification au travail en petits groupes dans un contexte de résolution de problèmes.

Ajoutons, pour justifier les activités de résolution de problèmes en petits groupes, que certains élèves se sentent insécures face à des problèmes à résoudre. Le fait de travailler en équipe les sécurise et leur permet de présenter une bonne attitude et de retrouver leurs moyens. Il ne faut pas passer sous silence que ces occasions de travail en groupe peuvent aider à développer la capacité de travail en collaboration: qualité de plus en plus recherchée par les employeurs. Les habiletés de communication peuvent également être améliorées.

Le rôle de l'enseignant lors des activités de résolution en petits groupes sera précisé à l'intérieur de l'élaboration de notre modèle d'enseignement à la section 4.

Travail individuel

Personne ne mettra en doute qu'il est essentiel que les élèves développent leur autonomie dans des tâches mathématiques. Tout comme il faut être conscient que certains élèves n'apportent pas une collaboration suffisante à leur groupe de travail et se fient aux autres. L'enseignant doit donc prévoir des moments où les élèves devront travailler seuls à des activités de résolution de problèmes. L'enseignant jouera alors un rôle analogue à celui qu'il tient lors du travail en petits groupes.

Vers le modèle d'enseignement

L'enseignement de la résolution de problèmes est un problème qui n'a pas encore été résolu! On gardera à l'esprit que tout enseignement en mathématiques, indépendamment de sa forme ou de ses modalités, devrait viser les objectifs de pourvoir l'élève d'un riche éventail d'heuristiques, de développer chez lui des habiletés métacognitives de contrôle des actions de résolution de problèmes et une attitude de confiance et de lui inculquer des croyances réalistes en ce domaine d'activités.

Ces objectifs ne sont pas faciles à atteindre. Ils peuvent se réaliser à long terme par des interventions pédagogiques vigoureuses dans des conditions adéquates et avec du matériel didactique approprié. À l'ordre collégial, cette tâche est ardue. D'autant plus que, malgré les apparences, ces objectifs ont été négligés aux ordres précédents et plusieurs élèves ont développé au fil des années des conceptions inexactes de la résolution de problèmes et des mathématiques.

Dans la prochaine section, nous élaborerons un modèle d'enseignement dans lequel la résolution de problèmes est une composante importante. Ce modèle donne à la résolution de problèmes la place qu'il est souhaitable qu'elle occupe dans l'enseignement des mathématiques.

4

LE MODÈLE D'ENSEIGNEMENT

4. LE MODÈLE D'ENSEIGNEMENT

L'élaboration d'un modèle d'enseignement est un exercice difficile en soi. Il y a d'abord la crainte de produire un modèle réducteur des idées qui lui ont donné jour. Un modèle d'enseignement est fait de multiples nuances qu'il n'est pas toujours possible de traduire dans sa syntaxe. Il nous apparaît donc important d'apporter certaines précisions dès le départ.

Dans le débat "processus versus produit", nous n'avons personnellement pas de position radicale. Certes, nous croyons qu'une attention beaucoup plus grande devrait être portée au processus, mais il ne faut pas pour autant négliger le produit. Comme nous l'avons noté à quelques reprises, les connaissances mathématiques demeurent plus importantes que jamais, mais nous devons aussi, en parallèle, améliorer les différentes manières de produire, d'utiliser ou d'exploiter ces connaissances. Notre parti-pris pour le constructivisme et l'approche par résolution de problèmes en témoigne.

En effet, la perspective constructiviste met l'accent sur les mécanismes mentaux internes utilisés lors de la production du savoir. Ainsi, l'importance accordée au processus dans le développement des connaissance n'est pas sacrifiée. De la même façon, en résolution de problèmes, le processus est central: la représentation du problème, le choix des heuristiques, le contrôle de la démarche sont des éléments essentiels. Une fois cette démarche complétée, il y a idéalement une solution, un résultat, un produit. D'ailleurs, nous croyons qu'un choix judicieux de problèmes favorise l'émergence de nouvelles connaissances ou de résultats fort pertinents. Ainsi, le constructivisme et la résolution de problèmes entretiennent l'importance des connaissances et des habiletés intellectuelles aptes à améliorer le processus d'apprentissage.

Quant au débat "concret versus abstrait", nous considérons que bâtir de façon signifiante les mathématiques à partir de la réalité de l'apprenant est une partie importante de l'enseignement. Mais, on ne peut négliger le pouvoir d'abstraction des mathématiques nécessaire à une modélisation de la réalité. L'apparent conflit entre l'aspect abstrait des mathématiques et ses liens étroits avec le monde réel donne lieu à des difficultés en enseignement des mathématiques. Certains enseignants s'attachent à la nature abstraite des mathématiques et laissent l'impression que cette discipline devrait être enseignée d'une manière totalement abstraite sans référence au monde réel. D'autres perçoivent que les mathématiques peuvent être induites par des situations concrètes; ils demeurent toujours à ce niveau et croient que les mathématiques doivent être apprises, enseignées et discutées en relation avec certains éléments de référence physiques. Poussée à l'extrême, chaque vision ne dessert pas la cause de l'apprentissage des mathématiques.

D'une part, il est clair que la réalité de l'apprenant comporte maints éléments concrets et comme on bâtit autour de cette réalité, il est possible d'utiliser ces éléments comme initiateurs de nouvelles connaissances. Utiliser des jeux de cartes, des dés, des résultats à la loterie dans l'étude des probabilités ou en général du matériel manipulatoire n'est pas réservé, comme certains le croient, aux élèves en difficulté. Les mathématiques développées à partir du monde réel sont porteuses de sens. Cependant, les élèves doivent aussi apprendre à travailler dans un contexte abstrait.

Ils doivent réaliser que les raisonnements abstraits permettent d'atteindre des résultats généraux applicables à toute réalité rejoignant les conditions initiales du développement théorique. Ils doivent aussi apprendre que raisonner avec des concepts abstraits est souvent plus facile et plus efficace que de travailler avec des éléments de référence physiques. Le symbolisme et le formalisme ont encore indiscutablement leur place.

D'autre part, la réalité de l'apprenant se transforme graduellement et s'enrichit d'éléments de plus en plus abstraits. Ainsi, l'élève qui arrive au collégial sait ce qu'est une variable, une équation, une fonction... ce sont des éléments qui normalement comportent une signification et sur lesquels on peut bâtir de nouvelles connaissances. Il est alors possible d'initier les connaissances dans un mode relativement abstrait, l'important étant que l'environnement d'apprentissage comporte des significations pour l'apprenant. Finalement, nous croyons que l'enseignement des mathématiques doit tenir compte des liens entre le monde réel et la discipline tout en lui permettant de découvrir que la puissance et la beauté des mathématiques résident dans son abstraction.

4. Le modèle d'enseignement

4.1 Principes d'élaboration du modèle

Voici les principes retenus pour l'élaboration de notre modèle d'enseignement. Chacun des principes est présenté et brièvement commenté.

1. Une véritable autonomie intellectuelle de l'apprenant constitue l'objectif ultime de l'enseignement.

Même si les enseignants adhèrent de façon générale au principe de l'autonomie intellectuelle de l'apprenant, il est bon de le rappeler. Ceccata, un pionnier de l'analyse conceptuelle, disait à propos de l'éducation (von Glaserfeld, 1989):

> La chose importante est de montrer à l'enfant la direction dans laquelle il faut aller, de lui montrer à trouver son propre chemin, de le retracer et de le poursuivre. Seulement de cette manière, il sera capable d'assumer une attitude scientifique avec laquelle il peut aussi approcher les choses de l'esprit.

Le modèle d'enseignement que nous vous présenterons essaie autant que possible de respecter ces idées sur l'autonomie intellectuelle.

2. Chez l'élève, la prise de conscience, le développement et le contrôle de divers processus d'apprentissage sont à favoriser.

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, la formation continue sera une réalité de vie pour la plupart des citoyens du 21ième siècle. "Apprendre à apprendre" deviendra un atout majeur, particulièrement en mathématiques. À ce sujet, Brophy (1986) déclare:

> Étant donné la croissance des connaissances mathématiques et de leur utilisation, la réalisation la plus importante de l'école est, peut-être, que tous les élèves quittent l'école avec l'habileté et le goût de continuer à apprendre des mathématiques et à apprendre de nouvelles façons d'utiliser les mathématiques.

Dans ce cadre, chaque individu devra développer des habiletés en métacognition. En résolution de problèmes, on a vu que c'est une composante essentielle. En fait, dans tout apprentissage impliquant des habiletés intellectuelles de haut niveau (et, ce sera de plus en plus fréquent) interviennent la métacognition. Pour ces raisons, un retour réfléchi sur les divers processus d'apprentissage nous apparaît être un nouvel élément à intégrer à nos pratiques pédagogiques.

3. Une certaine synthèse des connaissances est à viser dans la démarche d'apprentissage.

D'abord, une mise au point s'impose. Nous voyons la synthèse comme une opération intellectuelle visant à réunir des éléments en un tout structuré présentant des qualités ou des valeurs nouvelles par rapport aux éléments de départ. Ce n'est donc pas une récapitulation ou un empilage de connaissances disparates. Nous croyons que cet aspect mérite d'être amélioré à l'intérieur de nos cours.

Comme Schoenfeld le faisait remarquer, les élèves se posent rarement des questions telles: "Comment cette connaissance est-elle reliée aux autres connaissances acquises dans mon cours?" ou "Comment les connaissances de ce cours sont-elles reliées aux connaissances de mes autres cours?" Nous estimons que cela fait partie du rôle de l'enseignant de provoquer des situations où ces questions peuvent avoir certaines réponses. L'élève pourra ainsi développer une meilleure organisation de ses connaissances et une capacité accrue de les utiliser.

4. Toute démarche intellectuelle comporte une dimension affective.

Bien sûr, ce principe peut être justifié bien simplement. Nous ne sommes pas des robots et toute démarche intellectuelle est une affaire de tête... et de coeur. Mais il y a une autre explication qui est intéressante à développer. Le cerveau a trois composantes physiques qui se sont superposées au cours de l'évolution humaine: le cerveau reptilien (celui des réactions instinctives), le cerveau moyen (siège de l'affectivité et de la mémoire) et le cerveau supérieur (celui de la conscience, de la rationalité et de la pensée réflexive). Ces trois cerveaux sont en continuelle interaction et cela implique que toute démarche intellectuelle est imprégnée, à divers degrés, d'une touche émotionnelle. Ainsi, les connaissances antérieures auxquelles s'adaptent les nouvelles connaissances sont chargées d'une affectivité dont il faudra tenir compte dans l'organisation pédagogique. Par exemple, le cerveau supérieur ne se met vraiment en marche que lorsque le stimulus intellectuel est accompagné d'une résonance affective. Il s'ensuit que toute stratégie pédagogique doit contenir les éléments provoquant une stimulation émotive bien dosée: ni trop forte, ni trop faible.

Par ailleurs, la dimension affective ne concerne pas uniquement les rapports entre le sujet et la discipline, elle concerne les rapports du sujet avec ses pairs, avec le professeur, avec l'environnement d'apprentissage de même que la perception qu'il a de lui-même. Dans ce dernier cas, on touche à la confiance de l'individu en ses capacités. Cette confiance est un ingrédient qu'il faut continuellement entretenir. Elle est requise pour faire des mathématiques, mais à l'intérieur de cette activité, on peut également la développer. L'élève rencontrera des problèmes durant toute sa vie. C'est le propre des mathématiques d'attaquer des problèmes. Celui qui aura connu du succès dans de telles situations aura développé une confiance en soi inestimable. À ce titre, les mathématiques peuvent jouer un grand rôle.

5. La connaissance n'est pas reçue de l'environnement mais est plutôt construite par l'apprenant au moyen de ses actions.

Bien sûr, on y aura reconnu un principe de nature constructiviste. L'adoption de ce principe force le rejet de la conception de l'enseignant comme "dispensateur du savoir". Aylwin (1990) appuie cette idée:

> Aucun maître, si habile soit-il, ne saurait produire directement le savoir dans l'esprit de l'élève, il ne peut que créer une situation propre à déclencher chez l'apprenant les opérations mentales de l'apprentissage.

Pour Piaget, savoir c'est agir. Le rôle principal revient alors à l'élève: tout le processus d'apprentissage devient centré sur lui car lui seul peut et doit être l'architecte de ses connaissances. En accord avec ce principe, le professeur se voit confier le rôle de conseiller et de créateur d'environnements d'apprentissage à l'intérieur desquels l'élève aura à poser des gestes pour acquérir de nouveaux éléments de connaissance. L'enseignant n'est donc plus la personne "qui a toutes les réponses". Comme le disait Einstein:

> Je n'enseigne rien à mes élèves, j'essaie seulement de créer les conditions dans lesquelles ils peuvent apprendre.

6. Les nouvelles connaissances sont réellement intégrées par l'apprenant quand il en construit une signification à partir de ses connaissances antérieures.

En d'autres mots, on ne peut apprendre quelque chose qui nous est totalement nouveau. Une situation d'apprentissage qui n'a pas de "sens" pour un élève laissera celui-ci indifférent ou complètement démuni. Pour de jeunes enfants, cette réalité est habituellement tirée de son monde physique: leurs doigts, des pommes, la grandeur de leurs amis, la "pointe de tarte" qu'ils doivent former avec leurs skis... Pour des élèves plus âgés, c'est le même phénomène. Par exemple, l'arithmétique, qui est drôlement abstraite pour un enfant de 6 ans peut être cette réalité requise pour l'aider à comprendre l'algèbre. À son tour, l'algèbre peut devenir cette réalité sur laquelle se bâtira le calcul différentiel et intégral. Une compréhension des mécanismes du constructivisme confirme les faits précédents. L'assimilation et l'accommodation s'opèrent autour de comparaisons avec des schèmes établis. Si les éléments de connaissance que l'on veut voir acquérir par l'élève ne tombent pas sous ses sens, ces comparaisons ne pourront même pas s'initier. Le conflit cognitif ne peut alors se manifester et le nouveau savoir scolaire proposé restera à la porte du cerveau de l'apprenant.

7. Les interactions sociales constituent une composante essentielle de la démarche cognitive.

Les interactions sociales devraient jouer un rôle significatif dans la classe. De telles interactions obligent l'élève à présenter ses propres vues logiquement, à clarifier ses pensées, à défendre et à justifier ses opinions, à évaluer les explications d'autrui et à prendre conscience des divers mécanismes de pensée utilisés. Aylwin (1990) y voit une dimension importante à exploiter:

> En outre, de nombreuses recherches ont montré que les groupes où les élèves cherchent à apprendre les uns des autres et à s'entraider le plus possible pour progresser ont des résultats nettement supérieurs à ceux où la concurrence est la règle du jeu... Il importe donc d'établir dans la classe un climat de coopération où les élèves chercheront sans cesse à tirer parti de leurs connaissances et habiletés respectives.

Pour Piaget, les interactions sociales ont leur valeur dans l'effet qu'elles produisent sur l'adaptation, c'est-à-dire sur la restructuration des connaissances. Elles apportent une validation supplémentaire à nos connaissances et une meilleure objectivité.

Donner des responsabilités individuelles et collectives aux élèves devient alors nécessaire. Chaque élève a des qualités de leadership qui doivent être développées. Il sent alors qu'il est vraiment partie prenante de ce qu'il apprend. Une enseignante de 2ième année fut agréablement surprise lorsqu'elle utilisa une pédagogie en accord avec le présent principe (Cobb, Wood & Yackel, 1990):

> J'ai enseigné tout ce temps et je n'ai jamais su que les élèves de 2ième année en savaient autant au sujet des mathématiques! Je suis devenue une personne qui écoute mieux. Les enseignants sont fondamentalement "verbaux", ils sentent le fort désir de partager leurs connaissances avec les autres. Les enfants ne sont pas différents. Si nous faisons un réel effort pour les écouter, nous en sortirons enrichis.

Pour notre part, les expériences de travail coopératif que nous avons tentées se sont avérées heureuses. Les élèves aiment ce genre d'activités, elles leur permettent d'établir des contacts plus étroits avec les autres membres du groupe à l'intérieur de discussions intéressantes et d'échanges enrichissants.

8. **La démarche d'apprentissage en mathématiques doit favoriser le développement des habiletés d'utilisation des connaissances dans une variété de situations.**

On constate régulièrement que la connaissance est fortement liée au contexte dans lequel elle se développe. Ce lien est si fort que l'on déplore souvent que le transfert des connaissances, d'un contexte à un autre, ne se fasse pas aisément. En mathématiques, ce transfert devient opérationnel à l'intérieur de la résolution de problèmes. Il faut donc, dans le cadre d'un apprentissage particulier, introduire consciemment et méthodiquement, les contextes d'autres applications éventuelles autour desquels pourra se développer le savoir-faire en résolution de problèmes.

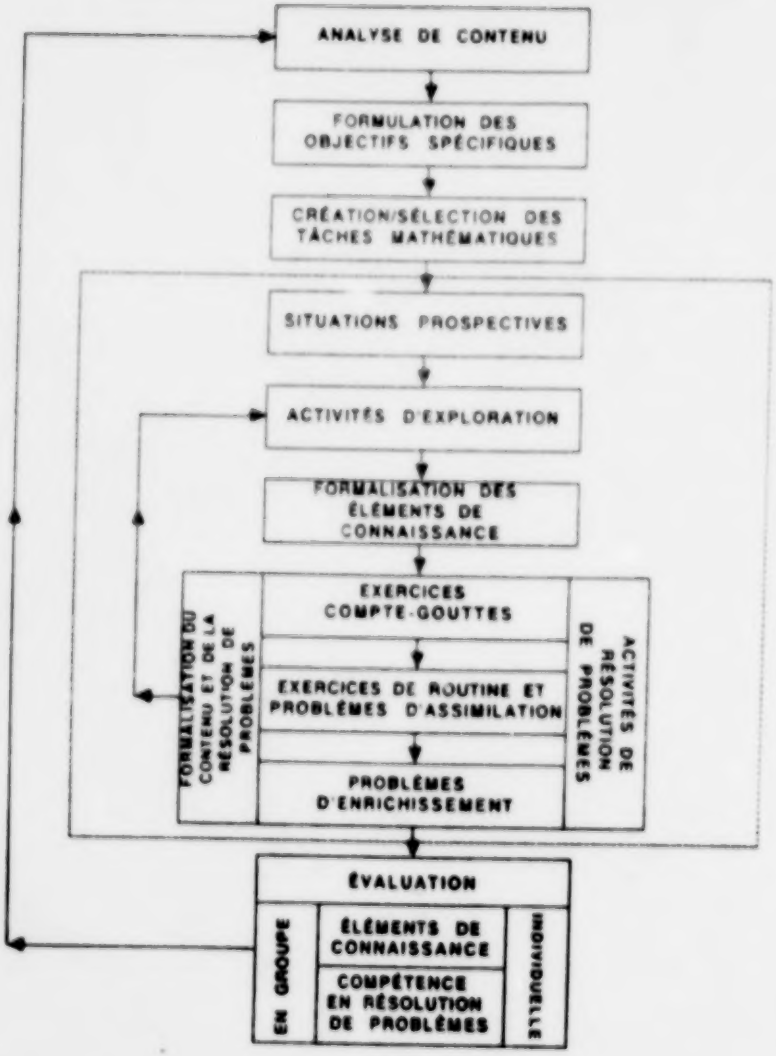
9. **L'acquisition des connaissances mathématiques doit refléter la nature dynamique de cette discipline, en particulier en ce qui touche la génèse des résultats.**

Les concepts et les résultats mathématiques sont établis à l'intérieur d'un processus de recherche qui est souvent ignoré lors de leur présentation. Sans refaire ces démarches intégralement, il faut permettre à l'élève de participer à l'élaboration des résultats fondamentaux d'un cours à l'intérieur d'activités de découverte. De cette façon, il pourra améliorer sa compréhension et ses processus d'apprentissage.

4.2 Structure du modèle

Dans la présentation de notre modèle d'enseignement, nous allons préciser la nature des activités constituant le modèle, établir la chronologie de ces activités et décrire le rôle des intervenants ainsi que leurs interactions mutuelles. Dans le présent thème, nous nous contenterons de vous présenter un diagramme permettant une vue d'ensemble de l'organisation des différentes activités mises en jeu. Les activités d'apprentissage qui apparaissent dans le rectangle pointillé du diagramme se répéteront de manière séquentielle tant que tous les éléments-clé d'un "chapitre" n'auront pas tous été explorés, formalisés et travaillés dans des exercices et des problèmes. L'étape d'évaluation pourra alors prendre place. Au thème 4.3, nous décrirons en détails chacun des éléments apparaissant dans ce diagramme. Nous croyons que cet ordre de présentation favorise une meilleure compréhension du modèle d'enseignement proposé.

DIAGRAMME DE LA STRUCTURE DU MODÈLE D'ENSEIGNEMENT



4.3 Description des éléments du modèle

Avant de se présenter en classe devant les élèves, l'enseignant a déjà accompli tout un travail d'organisation. Les trois premiers éléments du modèle se rapportent à ce travail de préparation qui est sous sa responsabilité.

Analyse de contenu

Cette étape vise à identifier clairement les éléments du contenu qui feront l'objet d'un apprentissage. Il résulte de cette analyse une mise en relief des éléments de connaissances que l'élève aura à acquérir ainsi que les habiletés qu'il aura à développer. Ainsi, relativement au contenu considéré, l'enseignant identifie :

- les concepts,
- les relations entre les concepts,
- les résultats et principes de base,
- les méthodes,
- les algorithmes,
- les procédures à appliquer.

Un réseau de concepts permet d'illustrer clairement les relations entre les concepts, d'en dégager une hiérarchie et d'identifier les constituantes-clé. L'organisation des éléments à enseigner est ainsi facilitée. Finalement, dans son analyse de contenu, l'enseignant doit tenir compte des connaissances que les élèves devraient normalement avoir acquises, de leurs habiletés et de leurs intérêts.

Formulation des objectifs

Le modèle d'enseignement que nous proposons vise entre autres à :

- favoriser une compréhension profonde des idées mathématiques par l'élève,
- acquérir des connaissances et développer une habileté à les appliquer,
- augmenter ses capacités de résolution de problèmes incluant les habiletés d'ordre métacognitif.

Les objectifs doivent donc être formulés de façon à refléter ces finalités. D'une part, l'enseignant aura à formuler pour ses élèves des objectifs d'acquisition de connaissances, de compréhension et d'application des éléments mathématiques. Comme on peut le constater, la formulation des objectifs d'ordre cognitif est un élément traditionnel des pratiques pédagogiques que nous désirons conserver. D'autre part, l'enseignant doit aussi fixer des objectifs qui traduisent ce qu'il attend de l'élève sur le plan de la résolution de problèmes.

Sélection, adaptation et création des tâches

Nous avons déjà souligné que l'élève doit apprendre d'une manière active. Il aura donc à s'impliquer dans les activités proposées par son professeur. Nous désignerons par le terme "tâches" les explorations, les exercices, les problèmes, les constructions et les projets dans lesquels s'engageront les élèves. À l'ordre collégial, le matériel requis pour notre modèle demande à la fois un réaménagement de certains éléments existants mais aussi un travail de création.

Dans ce qui suit, nous nous attarderons à la description des activités d'apprentissage.

Situation prospective

Les situations prospectives sont celles qui apparaissent au tout début d'une séquence d'apprentissage (ou chapitre) afin d'annoncer la direction de cet apprentissage. Ainsi, ces situations permettent à l'élève de prendre connaissance des problèmes qu'il pourra éventuellement attaquer avec les outils qui seront développés et, en somme, de développer une vue globale de la source des problèmes et des motifs qui justifient cet apprentissage. Dans ces situations, l'élève est actif, non pas dans le sens de résoudre ces problèmes (ce dont il est fort probablement incapable), mais bien dans le sens de développer sa compréhension de ces problèmes, de produire et d'analyser quelques données relatives à ceux-ci, de mûrir quelques points de vue et quelques interrogations tout en étant en contact avec plusieurs concepts qu'il devra étudier. Souvent, on aborde des problèmes seulement lorsqu'on est prêt à les résoudre. Ces problèmes méritent parfois d'être analysés dès le début de la démarche d'apprentissage afin de donner un sens plus profond à cette démarche et influencer positivement la motivation de l'étudiant. On peut lui proposer de tels problèmes dans des situations prospectives. Ces situations fournissent aussi à l'enseignant des occasions de présenter des aspects historiques, des grands noms, des anecdotes, de parler des diverses influences entourant le développement de certains champs mathématiques et même de suggérer certaines lectures à caractère "culturel".

Activité d'exploration

Trop souvent, hélas, dans les manuels scolaires, l'introduction d'un nouvel élément nous fait pénétrer trop rapidement dans le vif du sujet. On ne favorise pas, en général, la participation de l'élève à l'élaboration des éléments de base d'un chapitre. L'élève, ne pouvant rattacher ces éléments à ses connaissances actuelles, est souvent coupé de la signification de ces savoirs. Il peut donc avoir beaucoup de difficultés à les intégrer correctement à ses structures cognitives. Ces introductions partagent généralement un trait commun: la passivité de l'élève. On ne peut en attendre des retombées importantes sur le plan cognitif. À ce sujet, Bertrand et Girault (1990) offrent une comparaison intéressante:

> L'apprentissage d'un savoir dépend de ses conceptions initiales. C'est à travers elles que l'apprenant interprète les informations diffusées. Ainsi, il apparaît très clairement qu'avec des méthodes pédagogiques qui ne s'appuient pas sur les conceptions des apprenants, les connaissances transmises sont vite oubliées. On peut comparer cela à une affiche que l'on placarde et qui, peu de temps après, en se décollant, laisse voir ce qu'elle masquait.

D'autre part, Nesher (1988) nous rappelle que la familiarité des contextes peut être une condition nécessaire, mais n'est certes pas suffisante:

> Il est possible de montrer de nouvelles configurations non encore expérimentées par l'enfant dans un domaine qui lui est déjà familier. Il est possible d'avoir un langage qui symbolise les nouvelles configurations, mais on ne peut présumer (et c'est la mise en garde) que, simplement en lui montrant, l'enfant a instantanément noté ces nouvelles relations, a réfléchi sur celles-ci et en a absorbé la signification.

Pour chaque élément du cours que l'enseignant évalue comme un élément-clé (ce peut être un concept, un résultat, un principe, une méthode), il devrait prévoir au moins une activité d'exploration durant laquelle l'élève viendra en contact avec cet élément non encore formalisé. Cette démarche devrait s'appliquer aux éléments fondamentaux des contenus à l'étude. Dans ses propos, Mason (1989) précise davantage certaines conditions relatives à l'appréhension de nouvelles connaissances:

> Il est clair que nous ne pouvons apprendre à la place de l'élève. Par ailleurs, l'élève apporte à une classe une riche expérience qui lui a servi dans le passé à bâtir un sens à ses expériences. Quelles sont ces puissances qu'on a particulièrement besoin d'évoquer dans un sujet particulier? L'expression "prendre l'étudiant où il est" est malheureusement devenue un cliché, voulant maintenant souvent dire que l'étudiant ne sait pas grand'chose alors qu'il faudrait plutôt porter notre attention à aider l'étudiant à utiliser efficacement certaines ressources insoupçonnées. Notre expérience est fragmentaire. Nous plaçons ensemble des morceaux d'histoires explicatives que nous entendons ou construisons. Nous confrontons continuellement nos expériences passées pour y retrouver des situations similaires et la similarité inclut la structure de compréhension.

Finalement, une lecture des propos de Brandt, Marzano et Pickering (1990) peut nous aider à déterminer certaines caractéristiques d'une activité d'exploration.

> Les plus récentes recherches ont mis en lumière les opérations cognitives particulières impliquées dans l'acquisition initiale d'information. (Anderson 1983, Estes 1982).
> 1) Une opération cognitive clé consiste à activer les connaissances antérieures et les utiliser pour rendre signifiante la nouvelle information.
> 2) Une autre opération cognitive utilisée quand vous apprenez de la nouvelle information est d'organiser l'information de telle sorte à pouvoir l'associer et faire des liens avec le savoir existant dans la mémoire à long terme. Cela n'aide pas simplement la compréhension mais rend l'information plus facilement repérable en vue d'une utilisation ultérieure.

De leur côté, Bandler et Grinder, les spécialistes de la programmation neurolinguistique fondent l'essentiel de leurs démarches pédagogiques et thérapeutiques sur la notion d'ancrage, c'est-à-dire sur le fait que tout apprentissage se fixe dans la mémoire et le subconscient avec les caractéristiques (visuelles, auditives et kinesthésiques) des contextes interne et externe où il a lieu. Selon eux, 40% des gens environ seraient d'abord des visuels, 40% des auditifs et 20% des kinesthésiques (Cayrol & De Saint Paul, 1984). Dans la conception même d'une activité d'exploration, il faut donc prévoir insérer des composantes qui touchent l'apprenant sous ces diverses formes.

4. Le modèle d'enseignement

À la lumière des remarques précédentes et en gardant à l'esprit une vision constructiviste, nous croyons qu'une activité d'exploration devrait :

- se présenter fréquemment sous forme de problèmes,
- donner aux élèves le goût et le désir de résoudre efficacement ces problèmes,
- s'élaborer à partir de situations qui sont familières aux élèves (en tenant compte des acquis de ces derniers),
- activer les connaissances antérieures de façon à ce qu'elles soient disponibles pour établir des liens avec la nouvelle information et lui donner un sens,
- comporter si possible des composantes visuelles, auditives et kinesthésiques,
- stimuler l'intelligence de l'élève en misant sur la surprise, la contradiction ou encore le doute pour engendrer un conflit cognitif qui provoquera le besoin d'une adaptation au plan cognitif,
- comporter des possibilités de rétroactions, afin que l'élève puisse juger de la validité de ses conceptions antérieures sur le sujet, de la plausibilité de ses hypothèses et de ses raisonnements,
- permettre à l'élève de réaliser que les connaissances qu'il a développées sont perfectibles et demandent d'être exprimées dans une forme plus rigoureuse.

Pour nous, une activité d'exploration a aussi pour fonction de préparer le terrain à une formalisation ultérieure d'un élément-clé particulier. Nous croyons qu'un premier contact avec ces problèmes devrait être fait par l'élève seul à l'extérieur de la classe. Il a ainsi l'opportunité d'amorcer les processus d'assimilation et d'accommodation. La poursuite de cette démarche doit se faire en groupe où les interactions sociales viendront compléter et consolider l'adaptation des connaissances en cause. Dans ce type d'activité, on perçoit un esprit qui est conforme à une vision dynamique des mathématiques.

L'enseignant et l'activité d'exploration

Dans une activité d'exploration, en plus du rôle évident que l'enseignant doit jouer sur le plan mathématique, il y en a un autre, non moins négligeable, qu'il doit remplir pour que l'environnement de travail soit fertile et productif. L'enseignant :

- précise, s'il y a lieu, certains détails de l'activité,
- fournit de l'information, tels des rappels sur les préalables,
- propose des heuristiques dans les problèmes,
- incite les élèves à soulever des questions, à émettre des hypothèses et à les vérifier,
- peut demander à un élève d'expliquer sa démarche,
- encourage les élèves à donner un sens aux objets mathématiques,
- encourage les élèves à persévérer et à prendre le temps qu'il faut,
- fait participer tous les élèves, les incite à échanger entre eux,
- porte attention aux idées des élèves et respecte leur démarche intellectuelle.

L'élève et l'activité d'exploration

On ne doit pas considérer la classe comme formée d'individus isolés mais comme une collectivité cherchant à donner du sens aux mathématiques qui leur sont enseignées. Dans les activités d'exploration, les élèves devraient manifester une bonne volonté à :

- s'impliquer dans l'activité proposée et afficher une certaine ouverture d'esprit,
- tenter de faire ressurgir les connaissances antérieures utiles, les valider et les partager,

- émettre des hypothèses et les vérifier,
- comprendre et critiquer les idées émises par d'autres élèves tout en les respectant,
- relever les interrogations soulevées par les autres élèves ou le professeur.

Formalisation de premier temps

Une activité d'exploration débouche habituellement sur une phase de formalisation où l'élément-clé sur lequel porte l'activité d'exploration est mis en évidence. L'enseignant y joue un rôle de premier plan: on sollicite sa compétence en mathématiques. À l'occasion de la phase de formalisation suivant une ou plusieurs activités d'exploration, l'enseignant peut:

- dégager un concept,
- formuler une définition,
- amener les notations et les éléments terminologiques,
- élaborer une méthode,
- énoncer et prouver un résultat (théorème),
- décrire les modes de représentation,
- établir des liens avec des éléments déjà étudiés.

La formalisation permet à l'élève d'organiser de façon cohérente ses nouvelles connaissances et de les intégrer à ses structures cognitives. Tous les liens ne sont pas nécessairement aménagés entre les éléments-clé mais ces derniers sont bien établis. L'élève prend conscience de ses modes de fonctionnement pendant les activités d'exploration. Les régularités de la démarche peuvent être mises en relief par l'enseignant; elles informent alors l'élève sur ses propres mécanismes d'apprentissage.

Activité de résolution d'exercices et de problèmes

L'activité d'apprentissage des mathématiques la plus évidente et la plus répandue est certes l'activité où les élèves résolvent des exercices et des problèmes. Elle occupe une place importante dans notre modèle. Les activités de résolution d'exercices et de problèmes visent que l'élève:

- développe une bonne compréhension des éléments à l'étude,
- devienne habile à appliquer une procédure,
- dégage de nouveaux concepts,
- établisse de nouvelles relations liant les concepts,
- accroisse ses capacités à résoudre des problèmes,
- augmente ses capacités d'utiliser ses connaissances,
- améliore ses habiletés métacognitives,
- augmente sa confiance en lui.

Pour atteindre ces objectifs, l'enseignant propose à l'élève différentes catégories de problèmes ou d'exercices de degré de difficulté et de portée variables que nous nommons exercice compte-gouttes, exercice de routine et problème d'assimilation, problème d'enrichissement et problème défi. C'est dans cet ordre que l'élève les attaquera.

Il faut bien reconnaître que les élèves ne réagissent pas tous de la même façon devant des problèmes. À ce sujet, prenons en considération les propos de McLeod (1985):

> ... donner à un étudiant un problème difficile à résoudre pourrait résulter en une excitation physiologique (rythme cardiaque rapide, tension musculaire) qu'un étudiant peut interpréter en termes de peur et d'anxiété, tandis qu'un autre pourrait exprimer des sentiments d'excitation et de plaisir anticipé... Bien sûr, trop de tension peut être néfaste, menant à ce que les étudiants appellent des blocages mentaux à leur capacité de penser. Toutefois, une tension modérée semble améliorer la performance de la plupart des étudiants en résolution de problèmes et la baisse de tension qui suit la résolution d'un problème apparaît être une source majeure de satisfaction que procure la résolution de problèmes.

L'enseignant doit choisir méticuleusement les problèmes qu'il proposera à ses élèves. Ceux-ci doivent paraître attrayants et poser un défi d'un degré de difficulté raisonnable. Des problèmes attirants motivent l'élève et le disposent à investir du temps et des efforts à les résoudre. Cependant, s'ils sont trop difficiles, l'élève peut se décourager, perdre confiance en lui et même détester l'activité de résolution. Par ailleurs, il faut éviter d'aligner des problèmes semblables qui deviendraient alors de simples exercices de routine. En somme, il faut chercher un équilibre souvent issu de la pratique de l'enseignant.

Exercice compte-gouttes

Les exercices compte-gouttes présentent un coefficient de difficulté peu élevé et sont faciles à résoudre. Ils servent à vérifier de manière graduelle ("au compte-gouttes") si l'élève maîtrise les notions de base essentielles à la poursuite de son apprentissage. Les réponses aux exercices fournissent une rétroaction immédiate.

Les exercices compte-gouttes:

- informent l'élève s'il a acquis ou non les connaissances de base: définition, notation, terminologie, principe...
- aident à bien saisir les résultats,
- mettent en évidence les conceptions erronées,
- développent la confiance de l'élève en lui permettant de connaître le succès.

L'élève qui ne réussit pas à résoudre ces exercices doit conclure qu'il lui manque des éléments essentiels; il doit récupérer ces éléments avant de poursuivre. L'élève travaille seul ces exercices.

Exercice de routine et problème d'assimilation

Quand une habileté technique doit être développée (par exemple, l'habileté à appliquer les règles de dérivation dans un cours de calcul différentiel et intégral), il faut, évidemment, proposer des exercices de routine en quantité suffisante sans abuser de ce genre d'exercices ni s'y limiter.

Les problèmes d'assimilation permettent de poursuivre le travail de compréhension, d'établir des liens solides entre les connaissance fraîchement acquises et les connaissances antérieures favorisant l'accessibilité à ces nouvelles connaissances. Ces problèmes sont de difficulté moyenne. Dans ces problèmes, on peut:

- comparer des concepts,
- inférer une généralisation,
- déduire une conséquence,
- conjecturer.

- produire un contre-exemple,
- montrer la nécessité d'une condition à un théorème,
- appliquer des résultats, des principes ou des méthodes à de nouvelles situations,
- appliquer une procédure,
- lier certains résultats.

Ces situations fournissent des occasions de rétroaction. L'élève peut réaliser s'il utilise mal une certaine méthode ou applique incorrectement une procédure ou encore s'il a développé des conceptions erronées. Les problèmes d'assimilation n'exigent pas de stratégies de résolution élaborées quoique leur solution ne soit pas immédiate. L'élève travaille seul ou dans un petit groupe et termine en devoir les problèmes non complétés en classe.

Problème d'enrichissement

Les problèmes d'enrichissement présentent un niveau de difficulté élevé. Ils vont bien au-delà de la simple application, demandent des efforts plus poussés mais sont plus profitables. Sur le plan de la résolution de problèmes, ils exigent une plus grande capacité de la part de l'élève tout en contribuant à la développer. L'élève doit analyser la situation, élaborer un plan de résolution en sélectionnant les stratégies appropriées. Par la même occasion, ces problèmes peuvent constituer la source d'élaboration de nouvelles connaissances mathématiques. Souvent, les problèmes d'enrichissement permettent d'appliquer les notions mathématiques à des situations qui, a priori, ne semblent avoir aucun lien avec les mathématiques. Une analyse de la situation s'impose pour découvrir quels sont les concepts ou procédures mathématiques qui s'y appliquent. Ces problèmes amènent l'élève à percevoir les mathématiques d'une façon plus juste: les mathématiques ne sont plus un ensemble isolé de concepts et de procédures. Certains de ces problèmes peuvent même mener à la formalisation de nouvelles idées mathématiques.

Problème défi

Les problèmes défi exigent l'utilisation d'heuristiques élaborées et une bonne dose de créativité et d'imagination. On les réserve pour les élèves les plus brillants. Habituellement, on porte attention à ceux qui ont des difficultés d'apprentissage mais, à l'opposé, il faut aussi porter attention à ceux qui ont des capacités d'apprentissage exceptionnelles. On doit entretenir leur intérêt en leur proposant des tâches qui sont à leur mesure et espérer qu'ils développent, eux aussi, leur plein potentiel intellectuel. Les problèmes défi ont ce rôle à jouer.

L'enseignant et l'activité de résolution

Dans les activités de résolution de problèmes, l'enseignant aura à présenter, à titre d'exemples, la solution de plusieurs problèmes au groupe entier. Il est bon alors qu'il le fasse d'une façon réaliste, près d'un mode de résolution dynamique. Il aide les élèves à bien comprendre le problème. Il peut explorer plus d'une approche qu'il juge prometteuse. Il justifie ses choix de stratégies et s'interroge sur le déroulement de la résolution. Il interprète et vérifie le résultat. Une fois le problème résolu, il souligne les points saillants, revoit la solution, en explore les retombées. Il sensibilise les élèves aux aspects métacognitifs de la résolution de problèmes. L'enseignant joue alors le rôle de moniteur interne. L'enseignant peut aussi demander la collaboration de tous les élèves de la classe pour qu'ils solutionnent ensemble des problèmes.

L'enseignant s'assure que les élèves ont compris le problème avant de passer à l'élaboration d'un plan de résolution. Il demande aux élèves de faire des suggestions, de les critiquer et de les évaluer. Il indique qu'il y a des choix à faire mais laisse les élèves décider; il intervient pour qu'ils réfléchissent sur leur démarche; il leur demande si tout se déroule correctement; il commente la solution obtenue et peut en explorer les retombées. Il peut aussi considérer d'autres approches. Tout au long de cette démarche, il a une attitude réceptive face aux suggestions ou commentaires des élèves.

Quand les élèves travaillent en petits groupes ou individuellement, le rôle de l'enseignant se transforme. Il rencontre chaque groupe individuellement; il voit à ce que les élèves comprennent les problèmes; il répond à leurs questions; il les encourage à émettre des hypothèses, à partager des idées entre eux, à faire valoir leurs points de vue, à comprendre et à critiquer ceux des autres. Il suggère des heuristiques à ceux qui sont bloqués et les encourage à persévérer; il peut éclaircir pour les élèves un élément de contenu. Il incite les élèves à bien choisir et utiliser leurs heuristiques et encourage l'utilisation de voies différentes. Il s'assure que les élèves progressent correctement en leur demandant: "Que faites-vous exactement? Pouvez-vous le décrire précisément? Pourquoi le faites-vous? Qu'obtiendrez-vous en le faisant? Comment l'utiliserez-vous après? Cela vous aidera-t-il?" Ainsi, en posant ces questions aux élèves, il leur permet de se situer dans le processus de résolution et ainsi, à la longue, on peut espérer que chaque élève arrivera à se questionner lui-même. Finalement, l'enseignant peut demander à un élève ou à un groupe d'expliquer sa solution et même de la présenter à la classe. Il propose aux élèves des situations où ils peuvent inventer de nouveaux problèmes en modifiant les conditions d'un problème déjà résolu.

L'élève et l'activité de résolution

Il est souhaitable pour l'élève qu'il s'implique activement dans les activités de résolution. Par exemple, lors de présentations par le professeur, il est attentif, prêt à répondre aux questions et à émettre des suggestions. Également, lors du travail en groupe restreint, il travaille dans un ordre logique en respectant les différentes phases de résolution. À l'intérieur de ces phases, il se sent responsable de faire progresser la démarche en suggérant des éléments de solution. Il est méthodique quand il applique son plan de résolution... s'il demande l'aide de l'enseignant, il évite l'énigmatique commentaire: "J'comprends rien"!

Il y a définitivement des attitudes souhaitables en résolution de problèmes. Le pédagogue russe Krutetskii a analysé un groupe d'étudiants compétents en problem-solving. Entre autres caractéristiques, il a fait ressortir que ceux-ci avaient un bas niveau d'anxiété en rapport avec leurs tâches mathématiques, ce que certains qualifient "d'attitude positive". Rosemary Schmalz (1989), quant à elle, considère que l'engagement dans la voie du problem-solving doit être accompagné d'une attitude particulière toute aussi importante que les stratégies que l'on veut développer. Elle décrit cette attitude, qu'elle appelle "disposition mathématique" comme suit:

- confiance à utiliser les mathématiques comme outil pour communiquer, raisonner et résoudre des problèmes;
- flexibilité à explorer les idées mathématiques et à essayer différentes méthodes de résolution de problèmes.

- consentement à persévérer à une tâche mathématique,
- intérêt, curiosité et créativité en regard des mathématiques,
- propension à réfléchir sur sa manière de penser.

L'élève et le professeur travaillent ensemble à bâtir et à maintenir ces attitudes.

Formalisation de deuxième temps

Après les activités de résolution de problèmes, le professeur dégage les idées importantes et les organise d'une manière cohérente. Ces actions touchent deux facettes: le contenu mathématique et la résolution de problèmes.

Formalisation sur le contenu mathématique

Suite à la résolution de problèmes, particulièrement les problèmes d'assimilation et d'enrichissement, l'enseignant procède à une nouvelle phase de formalisation. Il pourra:

- dégager et prouver un nouveau résultat par le biais d'une généralisation,
- établir des liens entre des éléments de contenu,
- formuler un nouveau concept,
- introduire une notation,
- élaborer une méthode, décrire une procédure,
- faire une synthèse,
- mettre en évidence et corriger des conceptions erronées d'éléments de connaissance.

Formalisation sur la résolution de problèmes

La formalisation sur la résolution de problèmes peut très bien se faire au moment où le professeur commente la solution d'un problème qui vient d'être résolu. Ici, c'est la compétence en résolution de problèmes de l'enseignant qui est mise à contribution. Il ne doit pas nécessairement attendre que toutes les activités de résolution de problèmes soient complétées. Ce qui importe, c'est que l'enseignant puisse rattacher ses interventions à des événements précis de l'activité de résolution. À l'étape de formalisation, l'enseignant peut:

- amener les éléments terminologiques de la résolution de problèmes (inconnue, données, condition, clause de la condition, élément auxiliaire, phases de résolution, sous-problème, problème intermédiaire, recherche d'un patron, raisonnement régressif, raisonnement progressif...),
- définir les phases de résolution et les placer dans le bon ordre,
- expliciter les heuristiques,
- donner des conseils aux élèves concernant l'écriture des solutions,
- donner des informations d'ordre métacognitif,
- faire ressortir des conceptions erronées de la résolution de problèmes et tenter de les corriger.

Nous terminons la description des éléments du modèle par les activités d'évaluation.

Évaluation

L'évaluation vient compléter la démarche d'apprentissage. Elle vise à mesurer le degré d'atteinte des objectifs par les élèves et constitue une opération complexe. Nous croyons que les méthodes d'évaluation doivent s'harmoniser aux modes d'apprentissage.

4. Le modèle d'enseignement

Comme notre modèle met l'accent sur une bonne compréhension des éléments de connaissance à l'étude et sur la compétence à résoudre des problèmes, l'évaluation doit conséquemment s'élaborer autour de ces axes: elle vise donc l'intégration de connaissances et la résolution de problèmes. Nul ne conteste que l'habileté de résolution de problèmes constitue une habileté intellectuelle de haut niveau et comme telle, n'est pas facile à évaluer. Plus l'objectif visé est de niveau élevé, plus ses manifestations sont difficiles à cerner et à décrire et, par voie de conséquence, à observer. Il en va de même pour la compréhension des idées abstraites. Nous ne prétendons pas avoir cerné la question mais nous présentons un point de vue qui se veut cohérent.

Évaluation des éléments de connaissance

Cette composante de l'évaluation s'attarde aux aspects conceptuel et procédural des contenus à l'étude. Elle mesure l'acquisition de connaissances, leur compréhension et l'habileté à les utiliser. Il importe que l'évaluation permette à l'élève de manifester sa compréhension et de la communiquer. Les connaissances à acquérir peuvent être:

- les définitions,
- les notations,
- la terminologie,
- les résultats (théorèmes)
- les principes...

Un élève peut montrer sa compréhension en:

- produisant un exemple ou un contre-exemple selon le cas,
- explicitant un principe,
- expliquant une procédure,
- en justifiant les conditions d'un théorème,
- en expliquant des liens entre des concepts.

Ses capacités d'utiliser ses connaissances se traduiront par:

- l'application d'une procédure, d'un principe,
- l'utilisation de résultats,
- la résolution de problèmes.

Cette partie de l'évaluation peut se réaliser individuellement ou en petits groupes.

Évaluation de la compétence en résolution de problèmes

Cette composante de l'évaluation vise à mesurer la compétence de l'élève à résoudre des problèmes. Nous le répétons: cette mesure est difficile à effectuer. Ce n'est pas à regarder la solution que nous propose un élève (le produit d'une démarche) que l'on peut nécessairement porter un jugement sur la démarche (le processus); la solution produite ne montre pas nécessairement la démarche suivie. De plus, il nous apparaît pratiquement impossible d'évaluer ces capacités dans un laps de temps limité. Le cadre actuel des examens (1 ou 2 heures) ne nous semble pas approprié. Nous croyons qu'il faut plutôt proposer des problèmes en devoir en donnant la liberté aux élèves de travailler en petits groupes. L'enseignant doit exiger des élèves la présentation de solutions complètes où la démarche est explicitée. Des points peuvent être accordés pour la qualité d'écriture de la solution.

Selon nous, il y a trois types de problèmes qui devraient être soumis aux élèves pour fins d'évaluation: les problèmes d'enrichissement, les problèmes-synthèse intra-cours et les problèmes-synthèse inter-cours. On connaît déjà les problèmes d'enrichissement. Par ailleurs, la présence des deux autres types de problèmes, centrée sur la synthèse des connaissances, est cohérente avec l'importance accordée à cet élément dans les principes sur lesquels repose notre modèle. Voyons plus en détails la nature de ces problèmes.

Nous entendons par " problème-synthèse intra-cours" un problème qui fait intervenir des éléments provenant de divers "chapitres" d'un même cours. Pour certains cours, tels les cours à choix de thèmes, il peut s'avérer presqu'impossible de proposer de tels problèmes. On peut alors penser à des problèmes qui vont toucher plusieurs concepts à l'intérieur d'un même thème. De la part de l'enseignant, il faut beaucoup de recherche et d'imagination pour produire quelques-uns de ces problèmes. Mais ils présentent une grande valeur d'apprentissage en permettant à l'élève d'intégrer de façon cohérente plusieurs concepts mathématiques. Ces problèmes permettent de palier une lacune que présentent plusieurs livres scolaires, lacune qu'un mathématicien mettait en évidence en affirmant: " Dites-moi de quel chapitre provient ce problème, je vous dirai comment le résoudre."

Tout comme les problèmes-synthèse intra-cours, les problèmes synthèse inter-cours mettent en jeu plusieurs éléments. La résolution de problèmes pourra exiger des savoirs provenant de plus d'un cours. Bien sûr, il faut s'assurer que les élèves à qui on propose ces problèmes ont suivi les cours en question. Ces problèmes proposent une vision du savoir qui s'oppose à celle basée sur la compartimentation des connaissances.

Ambiance de travail

Le contexte dans lequel les élèves font leurs apprentissages influence ce qu'ils apprennent. Il est du ressort de l'enseignant de créer un environnement de travail permettant de rendre productives les activités du modèle. Cet environnement devrait inciter au travail intellectuel, aux échanges, aux interrogations et à la créativité. Les séances de résolution de problèmes ne doivent pas prendre l'allure d'une course aux réponses. Schoenfeld (1987b) décrit comme suit l'environnement dont il tente de doter ses classes:

> ... créer un microcosme de culture mathématique - un environnement dans lequel mes élèves créent et discutent des mathématiques un peu comme le font les mathématiciens.

Un peu plus loin, il décrit ainsi l'atmosphère de travail:

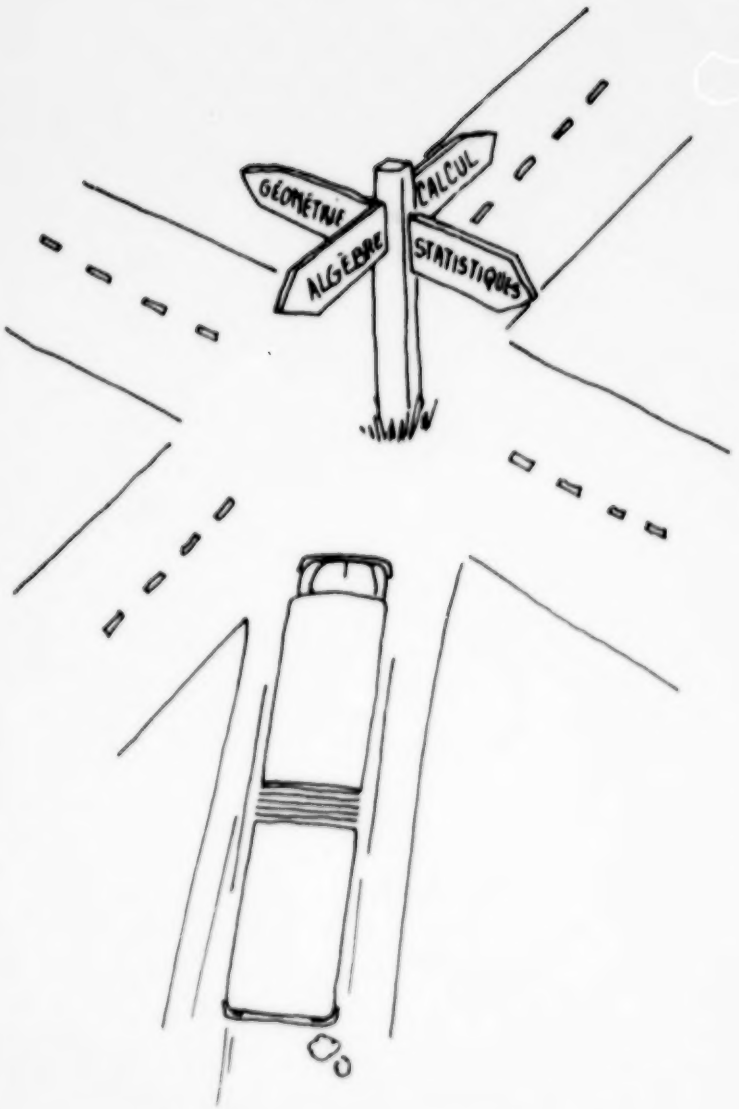
> D'abord, les étudiants en viennent à réaliser qu'ils ne sont pas engagés dans un cours où le but est d'obtenir la bonne réponse pour ensuite passer au problème suivant. Leur but (supporté par l'environnement) est de donner un sens aux mathématiques. Puis, ils réalisent que c'est plus profitable et plus amusant pour eux de donner un sens aux problèmes par eux-mêmes.

4. Le modèle d'enseignement

Le professeur doit profiter de toutes les occasions pour encourager ses élèves et souligner leurs "bons coups" car l'élève qui s'implique en résolution de problèmes devient vulnérable. Il doit sentir qu'il peut émettre librement ses idées, travailler à son rythme et qu'il a droit à l'erreur. Le modèle d'enseignement proposé restitue la pleine valeur pédagogique reliée aux erreurs des élèves. Ces derniers doivent réaliser qu'une erreur n'a plus, comme dans les approches traditionnelles, une valeur pénalisante. Elles sont plutôt une occasion d'évaluer l'état des savoirs et de les réorganiser. Le climat de travail doit donc refléter chaleur, tolérance et égalité tant dans les interactions entre les élèves que celles entre élèves et enseignant.

Il importe qu'élèves et enseignants partagent les mêmes objectifs. Les élèves doivent assumer une partie de la responsabilité de leurs propres apprentissages dans leur quête d'autonomie intellectuelle. Toutefois, il relève de l'enseignant de créer un environnement dans lequel les élèves sont encouragés à accepter cette responsabilité.

5



QUELQUES EXEMPLES D'ÉLÉMENTS DU MODÈLE D'ENSEIGNEMENT

5. QUELQUES EXEMPLES D'ÉLÉMENTS DU MODÈLE D'ENSEIGNEMENT

La description d'un modèle d'enseignement revêt habituellement un aspect général et plutôt théorique. Afin d'avoir une idée plus juste du modèle que nous venons de présenter, nous avons crû essentiel d'y ajouter quelques exemples de certaines constituantes de ce modèle. Dans un premier temps, nous nous attarderons aux éléments qui nous paraissent les plus novateurs: situation prospective, activité d'exploration, problème synthèse intra-cours et problème synthèse inter-cours. Ces éléments, fort importants, sont difficiles à construire et n'existent pratiquement pas dans le réseau. L'implantation du modèle nécessitera donc une importante somme de travail et il faudra tirer parti des forces créatrices de tous et chacun. Nous espérons que ces exemples sauront clarifier le modèle, répondre à certaines interrogations ou encore inspirer quelques-uns de nos lecteurs.

5.1 Situations prospectives

Exemple en calcul différentiel

Le rapport *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* de 1989 du N.C.T.M. encourage "l'exploration de sujets en calcul d'une perspective, à la fois, graphique et numérique". Le problème présenté ici n'est pas particulièrement nouveau, mais c'est le moment où il apparaît (au tout début du cours Mat 103) et les outils utilisés pour le résoudre (*Anugraph* et la "règle à pentes") qui en font l'originalité. Dans cette activité, nous utiliserons un modèle physique ainsi que des méthodes graphiques, numériques et symboliques.

Les expériences exploratoires sont importantes pour l'élève avant qu'il n'aborde les outils formels utilisés pour résoudre habituellement les problèmes de calcul. Le temps consacré à des activités de ce type lui sera utile dans la mesure où il pourra développer une réelle signification des problèmes qu'il pourra aborder et une compréhension du besoin de raffiner les approches utilisées initialement. Voici cette situation.

Afin de former un boîte sans dessus, on découpe quatre carrés égaux aux quatre coins d'une feuille rectangulaire de 20 dm sur 25 dm (à gauche dans la Figure 5.1).

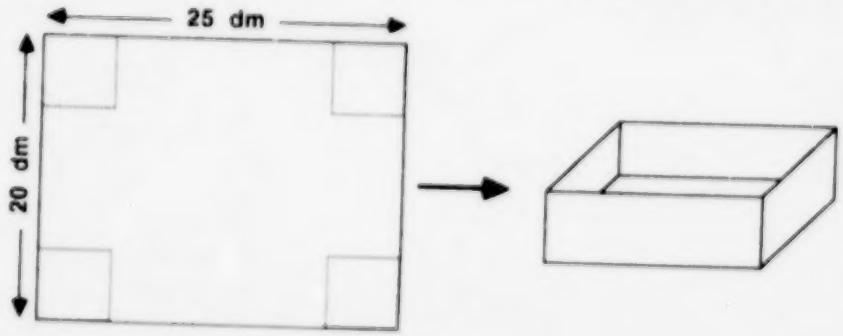


Figure 5.1

5. Quelques exemples d'éléments du modèle d'enseignement

Le problème consiste à trouver la longueur x du côté d'un carré découpé afin que le volume de la boîte formée soit maximal. Évidemment, la longueur du côté d'un carré peut varier entre 0 et 10 dm exclusivement. On invite les élèves à construire en petits groupes quelques boîtes possibles. Le tableau suivant indique pour différentes valeurs de x le volume de la boîte associée alors que la Figure 5.2 illustre les constructions correspondantes.

Longueur de côté du carré (en dm)	Volume de la boîte formée (en dm^3)
1	1 x 18 x 23 = 414
2	2 x 16 x 21 = 672
3	3 x 14 x 19 = 798
4	4 x 12 x 17 = 816
5	5 x 10 x 15 = 750
6	6 x 8 x 13 = 624
7	7 x 6 x 11 = 462
8	8 x 4 x 9 = 288
9	9 x 2 x 7 = 126

Dans les groupes d'élèves, il est possible de partager le travail afin de réaliser les différentes constructions de la Figure 5.2. Le professeur peut ensuite les présenter à toute la classe. Les élèves peuvent alors saisir en partie le dynamisme derrière ces constructions.

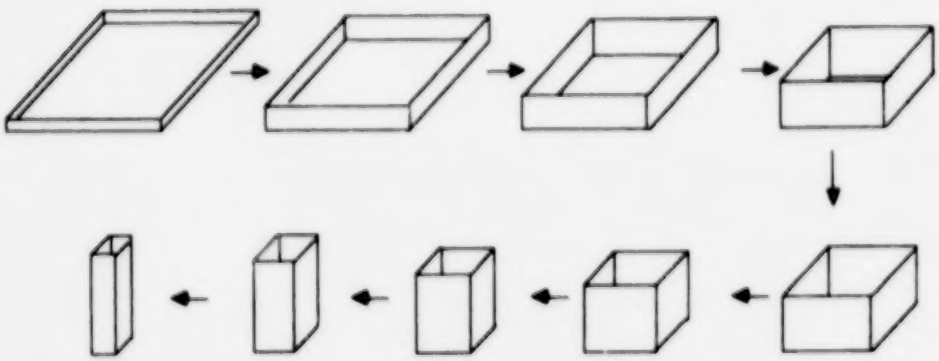


Figure 5.2

La prochaine étape consiste à tracer un graphique avec les données recueillies dans le tableau ci-haut.

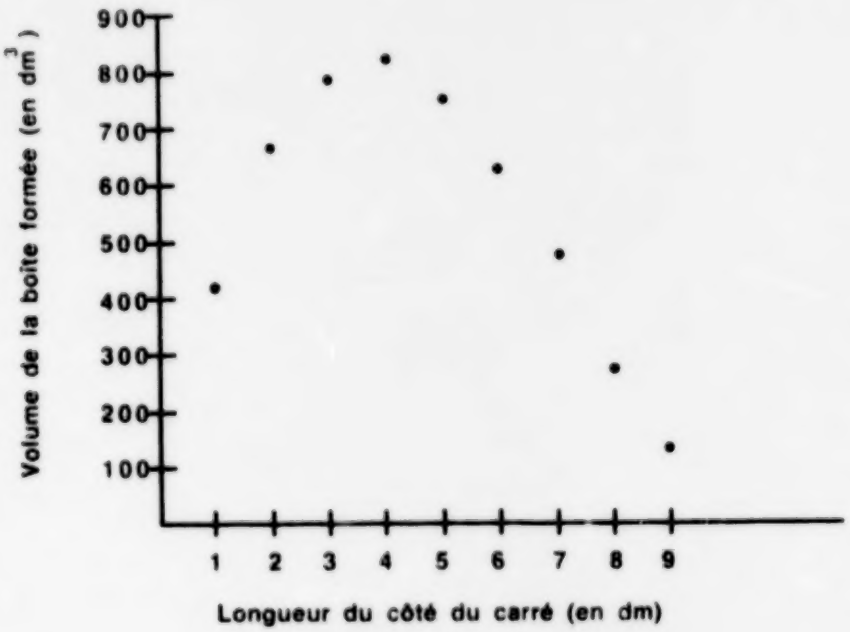


Figure 5.3

On peut, bien sûr, préciser ce graphique en calculant le volume pour des valeurs intermédiaires choisies sur l'axe des x. Par ailleurs, ce tracé correspond-t-il à une fonction précise? Peut-on l'exprimer en termes algébriques? Pour y répondre, on peut reprendre la table déjà dressée et faire ressortir une régularité qui s'avère générale.

Longueur de côté du carré (en dm)	Volume de la boîte formée (en dm^3)
1	$1 \times 18 \times 23 = 1 \times (20 - 2) \times (25 - 2)$
2	$2 \times 16 \times 21 = 2 \times (20 - 4) \times (25 - 4)$
3	$3 \times 14 \times 19 = 3 \times (20 - 6) \times (25 - 6)$
...	...
x	$x\ (20 - 2x)\ (25 - 2x)$

Ainsi, la fonction f exprimant le volume de la boîte formée en fonction de la longueur du côté du carré est $f(x) = x\ (20 - 2x)\ (25 - 2x) = 4x^3 - 90x^2 + 500x$. On peut poursuivre en utilisant un logiciel-traceur pour dessiner la courbe correspondant à ce polynôme de degré 3 (Figure 5.4). Avec *Anugraph*, on obtient ceci:

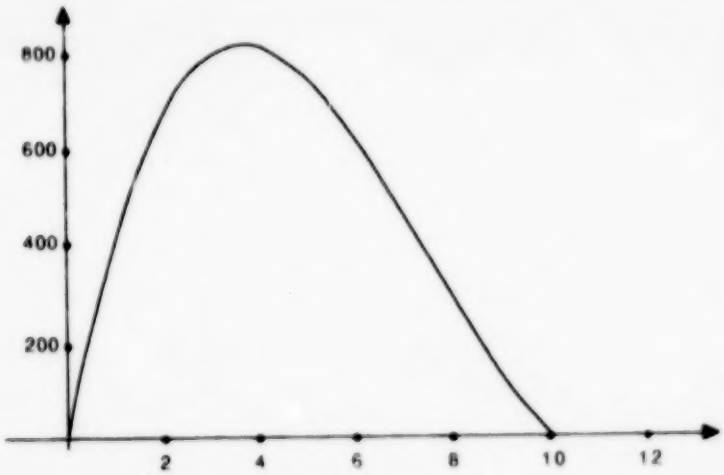


Figure 5.4

On a ainsi une bonne idée de la valeur maximale du volume (environ 820) ainsi que la valeur du x correspondante (environ 3,7). Y a-t-il quelque chose de particulier sur la courbe dans cette région? L'élève parlera inévitablement de l'"orientation" du tracé. Le professeur peut formaliser les commentaires reçus en parlant de la pente de la tangente à différents points de la courbe. Il serait bon d'examiner certaines de ces pentes pour des points de la courbe dont les abscisses sont rapprochées de 3,7. Pour faciliter cette tâche, on agrandit ("zoom") le graphique de la région où l'abscisse varie autour de cette valeur (Figure 5.5).

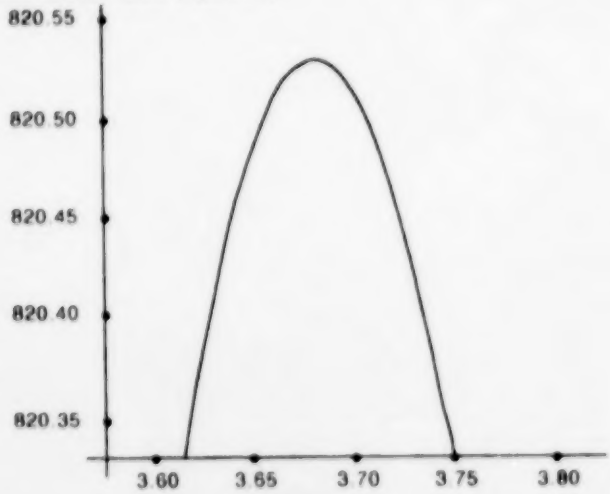


Figure 5.5

Introduisons dès maintenant la règle à pentes qui permet, instantanément et sans calculs, d'estimer des valeurs de pente de tangente à une courbe et de développer notre intuition de ce concept. Dans la Figure 5.6, on peut calculer la pente de la tangente au moyen du rapport $\overline{CB}/\overline{AB}$ ou $\overline{C'B'}/\overline{A'B'}$ ou encore $\overline{C''B''}/\overline{A''B''}$. Ces rapports sont tous égaux. On peut alors choisir AB de telle sorte qu'il soit égal à 1, la mesure de CB nous donne alors directement la valeur de la pente de la tangente.

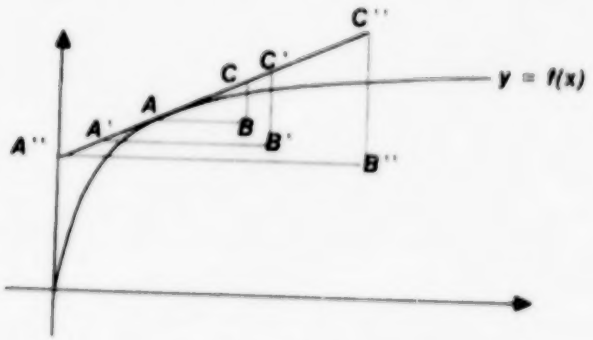


Figure 5.6

C'est ce principe que nous allons utiliser dans la construction de notre "règle à pentes". Notre pointeur PQ sera de longueur égale à 1 et les unités utilisées seront les mêmes que celles des graphiques sur lesquels nous utiliserons cette règle.

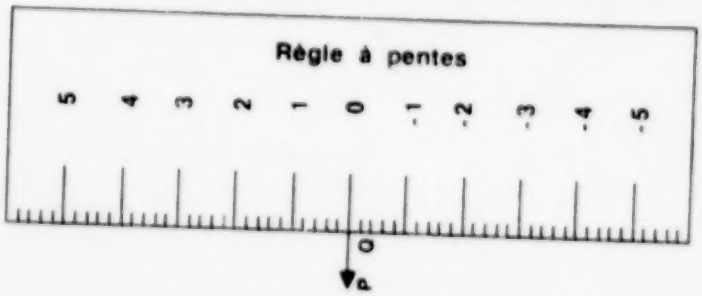


Figure 5.7

Ainsi, pour mesurer la pente de la tangente au point D (Figure 5.8), il faut d'abord tracer la tangente à la courbe en ce point. Après, il suffit de mettre le bout de la flèche du pointeur en contact avec la tangente passant par le point D en maintenant la règle perpendiculairement à l'axe des x. Il suffit alors de prendre la lecture de la règle à l'endroit où la tangente vient la couper: en D, on obtient approximativement 0,6. Même si la valeur de la pente est négative, la règle nous permet de l'obtenir. Ainsi, en E (Figure 5.8) on obtient approximativement -1 comme valeur de la pente de la tangente.

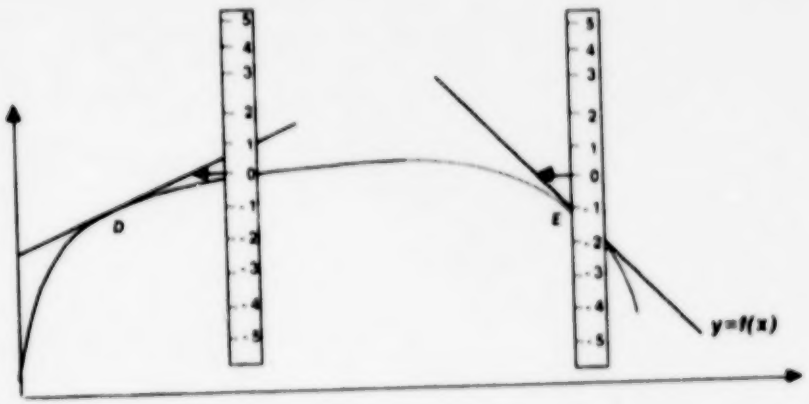


Figure 5.8

Ainsi, l'emploi de la règle à pentes nous permet de remplir le tableau suivant.

Abscisse du point de tangence	Valeur approximative de la pente de la tangente
3,65	3
3,66	2
3,67	1
3,68	0
3,69	-1
3,70	-2
3,71	-2,5
3,72	-3,5
3,73	-4,5
3,74	plus petit que -5
3,75	plus petit que -5

Le tableau semble indiquer que la pente de la tangente est nulle lorsque la fonction atteint sa valeur maximale. Pour obtenir de façon plus précise le point où cette valeur est atteinte, il est possible de poursuivre nos agrandissements.

Malheureusement, l'écran d'affichage ne nous permet pas de voir le point exact où ce maximum est atteint. Le calcul différentiel nous apprend que ce point a une abscisse égale à $(45 - 5\sqrt{21})/6$. Il faudra donc raffiner nos outils de calcul. La règle à pentes et l'ordinateur (tel qu'utilisé) nous laissent un peu sur notre faim. Il sera intéressant de revenir au dernier tableau lorsque l'élève aura fait l'apprentissage de la dérivée et lui demander de comparer les résultats obtenus au moyen des calculs de dérivée avec ceux obtenus avec la règle à pentes. Ce retour assurera, nous l'espérons, une plus grande compréhension du concept de dérivée, élément central du cours de calcul.

Exemple en probabilités et statistiques*
(* tiré du texte "Prob-habiletés" de A. Reumont)

Cette situation prospective peut se présenter au tout début d'un cours sur les probabilités ou les statistiques.

Les sondages surviennent souvent lorsqu'on veut étudier des phénomènes sociaux changeants. Par exemple, vous vous doutez que la proportion des foyers québécois possédant un micro-ordinateur a considérablement augmenté ces dernières années. Il est impensable de faire un recensement pour découvrir cette proportion, car ce serait trop dispendieux. De plus, ce serait tellement long que les données recueillies ne seraient plus pertinentes une fois compilées. Il faut alors se rabattre sur un sondage. Bien sûr, il est souhaitable que l'échantillon choisi soit le plus représentatif possible de la population mais on ne peut en être absolument sûr. Avec quel degré de certitude peut-on étendre les résultats observés à l'intérieur de l'échantillon à l'ensemble de la population ? C'est ce que nous allons étudier. Supposons que cette proportion soit de 32%. L'élève simulera un sondage en symbolisant l'ensemble des foyers québécois par 50 cartes d'un jeu de cartes (il suffit d'enlever le 2 de pique et le 2 de carreau).

Dès lors, les 16 honneurs du jeu symbolisent les foyers propriétaires d'un micro-ordinateur. (Ah oui, 16/50 = 32% !). Même si le modèle proposé n'est pas parfaitement représentatif, il sera suffisant pour nos besoins. On se contente de calculer les cas **extrêmes** qui peuvent survenir lorsqu'on pige 25 cartes sans remise. Le **nombre minimal** d'honneurs obtenus est 0 alors que le **nombre maximal** d'honneurs est 16. Cela veut dire que la **proportion minimale** d'honneurs observée est 0% (0/25) et que la **proportion maximale** d'honneurs est 64% (16/25). On ne peut donc être certain que les échantillons prélevés seront parfaitement "représentatifs" c.-à-d. montreront une proportion de 32%. Est-ce dû au nombre de cartes choisies? Pour le découvrir, on invite l'élève à remplir le tableau suivant.

Nombre de cartes choisies	Nombre minimal d'honneurs	Nombre maximal d'honneurs	Proportion minimale d'honneurs	Proportion maximale d'honneurs	Échelle (%) 0 — 100
5					
10					
15					
20					
25	0	16	0%	64%	
30					
35					
40					
45					
50					

Figure 5.9

5. Quelques exemples d'éléments du modèle d'enseignement

Même si la taille de l'échantillon est relativement grande, l'élève aura pu remarquer (dans le tableau précédent) qu'il ne peut **être absolument sûr** que l'échantillon choisi sera "représentatif". Notez que l'échantillon sera considéré comme "représentatif" si la proportion obtenue se situe entre 24% et 40% ou encore en vérifiant si le nombre d'honneurs se situe entre 6 et 10 inclusivement. Seulement dans ce cas-là, l'essai nous donne un succès. Par ailleurs, lors de sondages, l'échantillon choisi ne forme habituellement qu'une partie même de la population et pourtant, ceux-ci sont très souvent fort révélateurs. Afin de mieux comprendre ce phénomène, l'élève devra maintenant procéder à des simulations de sondage ou le nombre de cartes pigées sera fixé à 25. Il y parviendra en observant les consignes et l'exemple ci-bas. Ensuite, il remplira le tableau du bas de la page à l'aide des résultats obtenus de ses 100 simulations. Voici comment on présente l'activité à l'élève.

Consignes

a) Choisissez votre échantillon.
b) Comptez le nombre d'honneurs obtenus.
c) Calculez la proportion des honneurs.
d) Déterminez si cet échantillon est "représentatif" (il sera considéré comme tel si la proportion obtenue se situe à ±8% de la proportion "idéale" qui est 32%).
e) Répétez, en équipe, cette expérience au moins 100 fois.
f) Calculez la proportion des sondages "concluants".

Exemple

a) Vous pigez sans remise 25 cartes du jeu.
b) Vous avez obtenu 15 honneurs.
c) Il y a 15 cartes sur 25 soit 60% des cartes qui sont des honneurs.
d) Cet échantillon n'est pas "représentatif" car la proportion obtenue (60%) n'est pas entre 24% et 40%. Vous ne comptez donc pas cet essai comme un "succès".
e) Répétez, en équipe, cette expérience 100 fois.
f) Vous avez la proportion des essais "concluants" en divisant le nombre de "succès" par 100.

Simulation de sondage

Numéro de l'essai	Nombre de succès
1 @ 10	
11 @ 20	
21 @ 30	
31 @ 40	
41 @ 50	
51 @ 60	
61 @ 70	
71 @ 80	
81 @ 90	
91 @ 100	
Total	
Proportion des essais concluants	

Figure 5.10

En bref, bien que la proportion d'honneurs obtenus puisse se situer entre 0% et 64% **(cas possibles)**, on a obtenu dans _____ sur 100, que cette proportion s'est retrouvée entre 24% et 40% **(succès)**. Le graphique suivant résume bien cette idée.

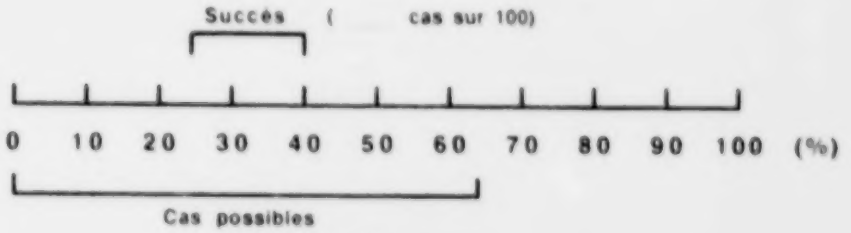


Figure 5.11

Dans l'activité d'exploration précédente, même s'il est possible d'obtenir des échantillons "non représentatifs", cela est tout de même peu fréquent. Vu sous cet angle, l'élève peut réaliser qu'un sondage est une forme de jeu de hasard où les chances d'en sortir gagnant sont très bonnes! Cette activité illustre bien l'étroite relation entre la notion de probabilité et une branche importante de la statistique: l'estimation. En effet, lorsqu'on pige 25 cartes du jeu et qu'on obtient 10 honneurs, on peut être tenté "d'estimer" la proportion des honneurs dans le jeu à 40% (soit à 10/25). On essaie alors de deviner la composition d'une population inconnue à partir d'un échantillon connu (Problème de type A).

Par contre, si on sait que le jeu réduit de 50 cartes comporte 16 honneurs, on peut être tenté de prédire les cartes qui seront choisies lorsqu'on en pige 25. On essaie alors de deviner la composition d'un échantillon inconnu à partir d'une population connue (Problème de type B). Dans chacun de ces problèmes, on ne peut être parfaitement sûr de ses prédictions. Ces dernières s'accompagnent toujours d'un "certain degré de certitude" et la mesure de ce degré est possible grâce au concept de probabilité.

Une fois que l'élève a complété l'activité que nous venons de décrire, il faut l'informer que dans un cours axé sur les probabilités, on se limite habituellement aux problèmes de type B. Par contre, dans un cours de statistiques, il aura (fort probablement!) l'occasion d'aborder des problèmes de type A. Cette activité permet donc à l'élève d'entrer en contact avec plusieurs idées importantes: l'idée de simulation (il reste peu de choses à faire pour formaliser la méthode Monte Carlo), l'idée de rencensement, de sondage, de population et d'échantillon. De plus, elle contribue à une démonstration de l'efficacité du sondage en maintenant tout de même quelques interrogations prometteuses. Finalement, l'élève peut saisir le lien entre les probabilités et les statistiques et avoir un aperçu des problèmes abordés dans ces cours.

5.2 Activités d'exploration et formalisation

Exemple en probabilité géométrique

Au bout d'une table d'au moins 2 mètres de long, collez sur sa surface une feuille respectant les configurations suivantes. (Cette activité peut se réaliser en équipe de 4 membres.)

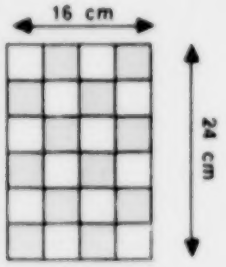


Figure 5.12

À partir du bout de cette table, faites glisser une pièce de 25¢ vers cette feuille. Le lancer comptera seulement si la pièce est entièrement à l'intérieur du rectangle de 16 cm sur 24 cm. Vous allez estimer empiriquement la probabilité que la pièce se retrouve **entièrement à l'intérieur** d'un des 24 carrés. À cette fin, nous vous demandons de tailler une pièce de carton aux dimensions d'une pièce de 25¢ et de percer un petit trou en son centre. C'est ce modèle de la pièce de monnaie que vous allez utiliser pour effectuer vos lancers. Lorsque l'essai est réussi, veuillez faire un point sur la planche de jeu en plantant un crayon feutre à pointe rouge dans l'orifice central de la pièce de carton. Par ailleurs, lorsque la pièce de carton, tout en étant entièrement à l'intérieur du rectangle de 16 cm sur 24 cm, intercepte une des lignes verticales ou horizontales, il vous faudra alors faire un point sur la planche de jeu en utilisant un crayon à pointe bleue. Enfin, à l'aide des résultats obtenus par votre équipe, remplissez le tableau suivant.

Essai#			Nombre de réalisations de R R: La pièce est complètement à l'intérieur d'un carré.
1	@	10	
11	@	20	
21	@	30	
31	@	40	
41	@	50	
51	@	60	
61	@	70	
71	@	80	
81	@	90	
91	@	100	
Total			

Dans cette activité, en utilisant la méthode Monte Carlo, l'élève obtient une bonne idée de la valeur de la probabilité théorique cherchée. De plus, la configuration des points bleus et rouges qu'il a obtenue peut l'amener dans un premier temps à dégager une définition pour une probabilité géométrique dans un espace à deux dimensions (comme un rapport d'aires) puis, une analyse réfléchie des points obtenus peut lui permettre de découvrir ces aires en question. Comme ces points peuvent être tracés sur une acétate pouvant être projetée à l'ensemble du groupe, le professeur peut montrer les résultats de chaque équipe individuellement et, pour un effet-choc, les superposer ... une image vaut mille mots!

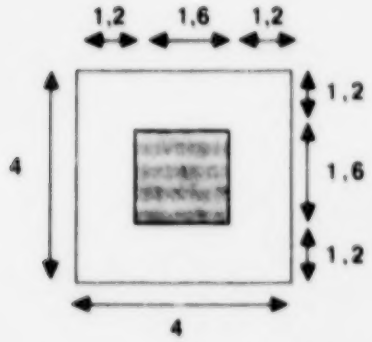
L'élève peut alors saisir l'essence même des problèmes de ce type et développer une compréhension que ne peut permettre aucun cours magistral. Voici maintenant la solution à ce problème accompagnée d'une formalisation des éléments-clé. En fait, lors de l'activité précédente, nous avons travaillé avec un espace échantillonnal infini. En effet, la feuille utilisée est formée d'une infinité de points. Dès lors, nous pouvons identifier l'espace échantillonnal au moyen d'une région notée Ω et l'événement R en question par une sous-région R de Ω. Si tous les points de Ω ont autant de chances d'être choisis les uns que les autres, nous pouvons alors calculer la probabilité de l'événement R (tel "l'essai est réussi") en employant la définition suivante :

$$P(R) = \frac{\text{aire de la région R}}{\text{aire de la région } \Omega}$$

Nous pouvons appliquer cette définition à notre problème. Essayons d'abord d'identifier la région Ω en concentrant notre attention sur le centre de la pièce de carton lancée. Celle-ci peut se déplacer horizontalement et verticalement selon le graphique de gauche de la Figure 5.13. Ainsi, dans le graphique de droite de la même figure, la région où le centre de la pièce (de rayon égal à 1,2 cm) peut se trouver est l'intérieur du rectangle en noir ou la base comme la hauteur ont été diminuées chacune de deux fois 1,2 cm. L'espace échantillonnal (Ω) est donc un rectangle de dimensions 13,6 cm sur 21,6 cm.

Figure 5.13

Quelle est la région des cas favorables? Il suffit que la pièce soit complètement à l'intérieur d'un carré c.-à-d. que son centre soit à plus de 1,2 cm du contour d'un carré. En prenant un seul de ces carrés (disons un blanc pour mieux voir), la région des cas favorables peut se représenter par le carré ombré comme suit :



(Toutes les mesures sont en centimètres)

Figure 5.14

La région totale des cas favorables (R) est donc constituée de 24 carrés de dimensions 1,6 cm sur 1,6 cm. D'où

$$P(R) = \frac{\text{aire de la région R}}{\text{aire de la région U}} = \frac{24 \times 1{,}6 \times 1{,}6}{13{,}6 \times 21{,}6} = 0{,}2091$$

Vous pouvez alors comparer cette probabilité à la fréquence-relative obtenue au terme des 100 essais.

5. Quelques exemples d'élémenis du modèle d'enseignement

Exemple en calcul différentiel et intégral

Les élèves d'un premier cours de calcul différentiel et intégral éprouvent souvent de la difficulté avec le concept de limite. Un premier contact avec ce concept qui ferait intervenir la convergence de suites plutôt que la limite d'une fonction réelle en un point semble préférable. Jockusch et McLoughlin (1991) défendent ce point de vue.

> Notre expérience nous indique que les élèves peuvent développer une compréhension plus profonde des différentes définitions de limites si leur premier contact avec les aspects plus formels du sujet se fait avec la limite d'une suite plutôt qu'avec les limites de fonctions de nombres réels.

Dans cette optique, nous proposons une activité d'exploration du concept de limite. Elle fait intervenir des notions de trigonométrie qui font normalement partie des préalables de nos élèves. Le matériel requis consiste en une calculatrice scientifique et en matériel de dessin (compas, règle, équerre, rapporteur). Les élèves travaillent en petits groupes à répondre aux questions suivantes.

On considère des polygones réguliers inscrits dans un cercle de rayon unitaire.

a) Construire, à l'aide de la trigonométrie, une formule qui donne l'aire a_n du polygone en fonction du nombre n de côtés. Faire une représentation graphique pour une valeur de n supérieure à 6.

b) Trouver, à l'aide de la trigonométrie, une formule qui donne le périmètre p_n du polygone en fonction du nombre n de côtés.

On considère maintenant des polygones réguliers circonscrits à un cercle de rayon unitaire.

c) Toujours à l'aide de la trigonométrie, construire une formule qui exprime l'aire A_n du polygone en fonction du nombre n de côtés. Faire une représentation graphique pour une valeur de n supérieure à 6.

d) Établir une formule qui donne le périmètre P_n du polygone en fonction du nombre n de côtés.

e) En utilisant les formules trouvées précédemment, compléter le tableau suivant.

n	a_n	p_n	A_n	P_n
3				
4				
6				
10				

f) À la "limite", la valeur de a_n est égale à _____ et celle de p_n est égale à _____
Symboliquement, cela se note

$$\lim_{n \to \infty} a_n = _____ \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} p_n = _____$$

g) Exprimer dans vos propres mots ce qu'affirment les égalités précédentes

h) Compléter

$$\lim_{n \to \infty} A_n = _____ \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} P_n = _____$$

Nous proposons quelques commentaires reliés à cette activité d'exploration

- Dans cette activité, il est possible de diminuer la tâche de l'élève en la limitant soit à l'étude des aires, soit à l'étude des périmètres.
- Tous les élèves n'auront pas trouvé toutes les formules. Le professeur peut en retrouver quelques-unes dans un cadre réaliste de résolution de problèmes en demandant les suggestions des élèves. Les formules suivantes répondent aux conditions imposées.

$$a_n = \frac{n \sin(\frac{360°}{n})}{2} \qquad p_n = 2n \sin(\frac{180°}{n})$$

$$A_n = n \tan(\frac{180°}{n}) \qquad P_n = 2n \tan(\frac{180°}{n})$$

Ici, les formules comportent des angles exprimés en degrés plutôt qu'en radians; il est rare que l'élève décide de lui-même de travailler en radians. Exprimée en radians, la formule qui donne a_n peut servir d'introduction à l'importante limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

- L'élève qui complète le tableau de la partie e) dispose de plusieurs éléments de vérification pour valider les formules qu'il propose. Par exemple, les nombres de la colonne "a_n" doivent croître alors que que ceux de la colonne "A_n" doivent aller en décroissant. Pour chaque ligne du tableau, il faut que $a_n < A_n$ et que $p_n < P_n$. En outre, l'élève peut réaliser, et cela sans effectuer de calcul, que les suites a_n et A_n convergent vers π tandis que les suites p_n et P_n convergent vers 2π. Comme l'élève connaît bien ces valeurs, il peut contrôler la validité des valeurs numériques qu'il inscrit dans le tableau.

- L'élève est invité à allonger le tableau vers le bas pour des valeurs de plus en plus grandes de n. Cela peut être une occasion de réaliser que les calculatrices doivent être utilisées avec prudence.

- Le professeur analyse avec ses élèves différentes formulations en mots qu'ils ont proposées de l'égalité

  $$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pi$$

  en les invitant à les critiquer, à souligner les imprécisions et à en arriver à dégager une formulation commune. Le professeur peut également proposer aux élèves une formulation correcte exprimée en termes simples.

- Bien sûr, cette seule exploration n'est pas suffisante pour une formalisation du concept général de limite. Le travail d'exploration est amorcé et il peut se poursuivre. L'enseignant intéressé peut consulter l'article de Jockusch et McLoughlin (1991).

ici, les formules comportent des angles exprimés en degrés plutôt qu'en radians; il est rare que l'élève décide de lui-même de travailler en radians. Exprimée en radians, la formule qui donne a_n peut servir d'introduction à l'importante limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

- L'élève qui complète le tableau de la partie e) dispose de plusieurs éléments de vérification pour valider les formules qu'il propose. Par exemple, les nombres de la colonne "a_n" doivent croître alors que que ceux de la colonne "A_n" doivent aller en décroissant. Pour chaque ligne du tableau, il faut que $a_n < A_n$ et que $p_n < P_n$. En outre, l'élève peut réaliser, et cela sans effectuer de calcul, que les suites a_n et A_n convergent vers π tandis que les suites p_n et P_n convergent vers 2π. Comme l'élève connaît bien ces valeurs, il peut contrôler la validité des valeurs numériques qu'il inscrit dans le tableau.

- L'élève est invité à allonger le tableau vers le bas pour des valeurs de plus en plus grandes de n. Cela peut être une occasion de réaliser que les calculatrices doivent être utilisées avec prudence.

- Le professeur analyse avec ses élèves différentes formulations en mots qu'ils ont proposées de l'égalité

  $$\lim_{n \to \infty} a_n = \pi$$

  en les invitant à les critiquer, à souligner les imprécisions et à en arriver à dégager une formulation commune. Le professeur peut également proposer aux élèves une formulation correcte exprimée en termes simples.

- Bien sûr, cette seule exploration n'est pas suffisante pour une formalisation du concept général de limite. Le travail d'exploration est amorcé et il peut se poursuivre. L'enseignant intéressé peut consulter l'article de Jockusch et McLoughlin (1991).

Exemple en statistiques

Le théorème de la limite centrale constitue la pierre angulaire de l'inférence statistique; il importe donc qu'il soit bien compris de l'élève pour que celui-ci puisse l'utiliser efficacement et de façon critique. La preuve mathématique de ce théorème est difficile et est réservée aux cours avancés de probabilités et de statistiques. Il reste que sa compréhension est à la portée de nos élèves. L'exploration que nous proposons a pour buts de vérifier empiriquement les conclusions du théorème de la limite centrale et de développer chez l'élève une compréhension de ce résultat.

Au début, nous annonçons qu'il faudra, selon certaines modalités, essayer de découvrir en classe (pour un groupe de 40 élèves) la moyenne et l'écart-type d'une population comportant 100 individus. Ces 100 données sont groupées dans une grille de nombres de dimensions 10 x 10. De préférence, on choisit une population qui n'est pas distribuée selon une loi normale. Dans notre cas, nous avons choisi les entiers de 1 à 100.

1	45	47	54	18	32	11	74	72	7
36	63	65	83	44	80	61	53	17	89
69	70	42	6	15	21	30	87	60	85
34	14	58	76	93	28	5	90	96	9
51	78	81	97	48	100	67	40	94	71
3	22	43	10	56	84	35	2	16	37
27	95	19	68	38	12	73	77	55	82
92	8	91	62	98	33	23	49	66	46
26	86	24	88	50	52	13	79	64	57
99	39	75	31	4	29	25	59	20	41

Nous allons montrer rapidement cette grille au groupe entier et chaque individu (sans concertation avec les autres) aura tout de même le temps de choisir 5 nombres au hasard et de les prendre en note. Cette situation correspond bien à celle du sondage où là aussi le temps manque et l'on doit se contenter, dans un premier temps, d'un portrait partiel de la population. Chaque élève calcule la moyenne de son échantillon; puis, toutes ces moyennes sont groupées collectivement dans un tableau du modèle suivant (comportant une dizaine de lignes).

Classes	Fréquences	Fréquences cumulées	Fréquences relatives cumulées

L'exploration se poursuit et le professeur demande aux élèves de déduire graphiquement la moyenne et l'écart-type de la distribution des moyennes échantillonnales (cela peut se faire à l'aide de papier gausso-arithmétique sur lequel la courbe des fréquences relatives cumulées devrait s'approcher d'une droite). Par la suite, ces valeurs peuvent être calculées à partir des données du groupe. Le professeur peut alors demander au groupe de deviner la moyenne et l'écart-type de la population. Devant la diversité des réponses, il peut demander au groupe les moyens d'obtenir plus de précision et d'établir un consensus plus large. Inévitablement, le besoin de grossir la taille des échantillons choisis interviendra. À ce moment, il leur montrera à nouveau la grille et il leur permettra d'ajouter 5 données, de grimper ainsi leur taille d'échantillon de 5 à 10 et de reprendre le même type de calculs.

Avant d'amorcer ces calculs, deux séries de questions sont alors posées. Lorsque la taille d'échantillon passe de 5 à 10:

Qu'arrive-t-il de la moyenne de la distribution des moyennes échantillonnales? Augmente-t-elle? Diminue-t-elle? Demeure-t-elle la même?

Qu'arrive-t-il de l'écart-type de la distribution des moyennes échantillonnales? Augmente-t-il? Diminue-t-il? Demeure-t-il le même?

Ces questions devraient être discutées quelque temps en équipe. Par la suite, le calcul viendra trancher. Mais, un doute demeure: ces réponses cachent-elles une généralité ou est-ce un résultat isolé? Une exploration plus poussée est alors requise et c'est à ce moment-là que l'outil informatique vient à notre rescousse. À cet effet, nous proposons un programme interactif rédigé en langage BASIC qui sert à explorer divers aspects du théorème de la limite centrale.

Les échantillons sont construits à l'aide du générateur de nombres aléatoires intégré au langage BASIC. Le programme demande à l'utilisateur le nombre d'échantillons qu'il veut tirer ainsi que la taille d'échantillon. L'ordinateur produit alors les échantillons demandés et pour chacun, il calcule la moyenne. Il place dans un vecteur, le vecteur R, les fréquences des moyennes obtenues. Finalement, l'ordinateur affiche la représentation graphique de la distribution de ces moyennes. Notez que l'échelle horizontale va de 1 à 100 avec des graduations à toutes les 10 unités. Voici ce programme écrit sous sa plus simple expression.

```
DIM R(100)
CLS
RANDOMIZE TIMER
INPUT "Le nombre d'échantillons à tirer", NE
INPUT "La taille de chaque échantillon", TE

FOR j=1 TO NE
  FOR i=1 TO TE
    total= total+INT(RND*100)+1
  NEXT i
  moyenne=INT(total/TE + .5)
  R(moyenne)=R(moyenne)+1
  total=0
  LOCATE 16,7: PRINT "échantillon no.";j
NEXT j

FOR k=1 TO 100
  LINE (92+3*k,200)-(95+3*k, 200-4*R(k)), ,bf
NEXT k
```

On peut faire remarquer aux élèves qu'en choisissant 40 échantillons puis successivement une taille d'échantillon de 5 et de 10, l'ordinateur accomplira en quelques secondes ce que le groupe vient de faire auparavant avec beaucoup moins de rapidité. L'élève est alors en mesure de saisir parfaitement les calculs que fait l'ordinateur. De plus, en ayant manipulé concrètement des échantillons et en avoir calculé la moyenne, il peut mieux comprendre la signification des graphiques produits par l'ordinateur.

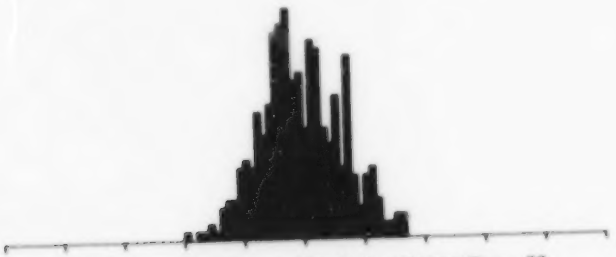
Par la suite, on peut laisser l'élève explorer à sa guise en lui rappelant qu'il doit essayer de répondre de manière générale aux deux questions concernant la moyenne et l'écart-type de la distribution des moyennes échantillonnales lorsque la taille d'échantillon grandit.

Nombre d'échantillons = 400 Taille d'échantillon = 1

Figure 5.15

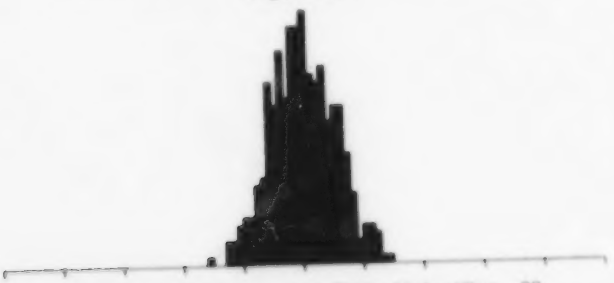
Nombre d'échantillons = 400 Taille d'échantillon = 10

Figure 5.16



Nombre d'échantillons = 400 Taille d'échantillon = 20

Figure 5.17



Nombre d'échantillons = 400 Taille d'échantillon = 30

Figure 5.18

Après cette exploration libre, le professeur peut aider l'élève à interpréter les diagrammes qu'il demande à l'ordinateur. Il peut lui faire remarquer que la moyenne d'échantillon présente une forme de distribution semblable à celle de la population considérée quand il choisit 1 comme taille d'échantillon (Figure 5.15). Il peut aussi souligner qu'à mesure que la taille d'échantillon s'accroît, la distribution prend la forme de la "cloche" de Gauss et qu'elle se "resserre" c.-à-d. que l'écart-type diminue. De plus, il peut faire ressortir que la moyenne des moyennes échantillonnales reste à peu près toujours la même. À cette étape, il peut dévoiler la moyenne et l'écart-type de la population étudiée. Le terrain est alors propice à l'énoncé du théorème de la limite centrale. Nous pouvons l'énoncer ainsi:

Soit une population statistique.
- La moyenne de la distribution des moyennes échantillonnales coïncide avec la moyenne μ de la population.
- L'écart-type de la distribution des moyennes échantillonnales est égale $\sigma/\sqrt{n}$ où σ est l'écart-type de la population et n, la taille des échantillons.
- Lorsque la taille de l'échantillon s'accroît, la distribution des moyennes échantillonnales tend vers une distribution normale quelle que soit la distribution de la population.

L'élève est invité à constater la concordance entre les résultats empiriques qu'il a obtenus et ceux que prévoit le théorème.

Même s'il n'a aucune idée de la preuve de ce résultat, l'élève est alors en mesure de comprendre la signification de ce résultat car il a pris contact avec les différents éléments mis en cause.

5.3 Problèmes synthèse intra-cours

Les problèmes synthèse qui complètent la section 5 sont écrits dans un style plus direct. L'esprit et les étapes de la résolution du problème peuvent être imaginés par le lecteur-professeur.

Exemple liant probabilité et progression arithmétique

Dans une partie de hockey, un seul but est compté à la première période et un seul autre est compté à la deuxième. Si on regarde uniquement la "partie minutes" des temps de ces deux buts, quelle est la probabilité que leur différence en valeur absolue soit supérieure ou égale à 5?

Pour bien comprendre ce problème, regardons quelques exemples réunis dans le tableau suivant.

Temps du premier but	Temps du deuxième but	Différence absolue (pour les minutes)
2:53	7:10	5
11:23	4:35	7
17:01	19:02	2

Ici également, il est possible de construire un petit programme afin de simuler cette situation à l'aide de la méthode Monte Carlo. Signalons que nous admettons l'équiprobabilité dans ce problème bien que ce ne soit pas parfaitement juste.

```
CLS
RANDOMIZE TIMER
succes=0
INPUT "Combien d'essais"; essais
FOR i=1 TO essais
  x=INT(20*RND)
  y=INT(20*RND)
  IF ABS(x-y)>=5 THEN succes=succes+1
  LOCATE 16, 10: PRINT"essais no.";i
NEXT i
proportion=succes/essais
LOCATE 16,30: PRINT"La proportion de succès est", proportion
```

Ainsi, après 5000 essais, il y a eu 2928 succès, pour une fréquence-relative d'environ 58,6%. Une solution de ce problème peut se faire à l'aide de la représentation graphique de la page suivante (Figure 5.19) où les points représentent les différents éléments de l'espace échantillonnal et ceux contenus dans des carrés représentent les cas favorables. Soit A, la différence absolue de la "partie minutes" des temps des deux premiers buts est supérieure ou égale à 5. Dès lors,

$$P(A) = \frac{2(1+2+3+\ldots+15)}{20 \times 20} = \frac{15 \times 16}{400} = \frac{3}{5} = 60\%$$

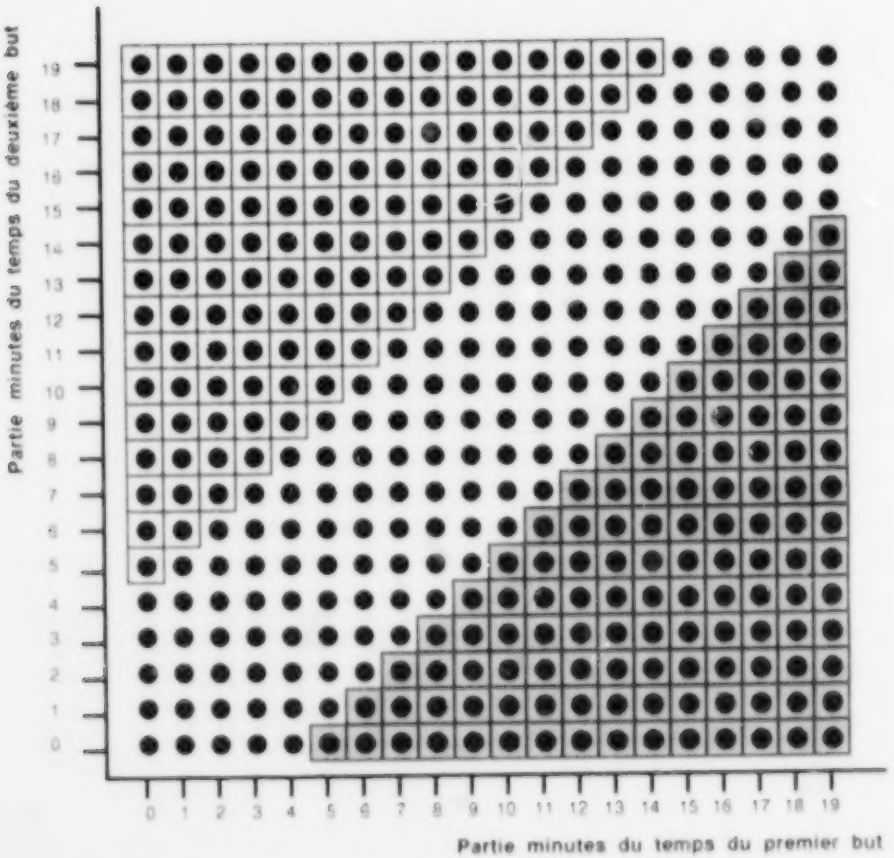


Figure 5.19

Ainsi, pour le cours Mat 101 où les thèmes probabilités et progressions arithmétiques sont abordés, ce problème peut constituer un problème synthèse intra-cours. Ajoutons que ce problème peut également servir comme activité d'exploration dont le but serait de découvrir la formule de la somme de termes d'une progression arithmétique. Une fois la représentation graphique complétée, il devient très naturel de déplacer les "triangles en escalier" pour former un rectangle. Par la suite, une formalisation faisant intervenir de façon moins magique l'inversion des termes peut être réalisée.

Exemple liant dérivée et intégrale

Voici l'énoncé d'un problème qui fait intervenir simultanément les concepts de dérivée et d'intégrale. Il se présente fort bien à des élèves qui suivent un premier cours de calcul différentiel et intégral.

> Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe associée à la fonction $\sqrt{x}$, la tangente à cette courbe au point (4, 2) ainsi que l'axe horizontal.

Nous présentons un aperçu de la solution permettant de voir comment s'intègrent les deux concepts mentionnés. D'abord, présentons un graphique de la situation.

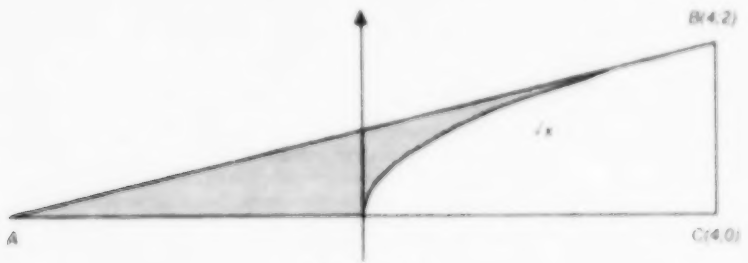


Figure 5.20

Nous devons calculer l'aire de la surface ombrée. Pour y parvenir, nous pouvons dans un premier temps déterminer l'équation de la tangente (la droite AB). Sa pente est donnée par

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}\Big|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

Comme la pente de la tangente est de 1/4 et qu'elle passe par le point B(4,2), son équation est

$$y = \frac{x}{4} + 1$$

Cette équation permet de déterminer que l'abscisse du point A est -4, cette valeur servira de borne inférieure à une des intégrales à calculer. L'aire de la surface ombrée est donnée par la différence d'intégrales suivante

$$\int_{-4}^{4} \left(\frac{x}{4} + 1\right) dx - \int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx$$

Le calcul de cette expression nous amène à un résultat final de 8/3. Ainsi, l'aire de la surface délimitée par la courbe associée à la fonction $\sqrt{x}$, la tangente à cette courbe au point (4, 2) ainsi que l'axe horizontal est de 8/3 unités d'aire.

5.4 Problèmes synthèse inter-cours

Exemple liant polynômes, calcul intégral et probabilité

Soit $x^2 + bx + c$, un polynôme de degré 2 dont les coefficients b et c sont choisis au hasard entre -k et k (ou k est une constante réelle positive).

a) Déterminer, en fonction de k, la probabilité que ce polynôme ait des racines réelles.

b) Si le nombre k est choisi au hasard entre 0 et 25, déterminer la probabilité que le polynôme généré ait des racines réelles.

Voici de courts programmes qui simulent respectivement les situations décrites en a) et b).

Programme A

```
CLS
RANDOMIZE TIMER
INPUT"La valeur de k" k
INPUT"Combien d'essais"; essai
succes=0
FOR i=1 TO essai
  b=2*k*RND-k
  c=2*k*RND-k
  IF b*b-4*c>=0 THEN succes=succes+1
  LOCATE 13,10: PRINT"Essai no "; i
NEXT i
proportion=succes/essai
LOCATE 13,30:PRINT"La proportion de succes est";proportion
```

Programme B

```
CLS
RANDOMIZE TIMER
INPUT"Combien de valeurs de k"; nk
succes=0
FOR j=1 TO nk
  k=25*RND
  IF k=0 THEN k=25*RND
  b=2*k*RND-k
  c=2*k*RND-k
  IF b*b-4*c>=0 THEN succes=succes+1
  LOCATE 13,10:PRINT"Valeur de k no "; j
NEXT j
proportion=succes/nk
LOCATE 13,30:PRINT"La proportion de succes est";proportion
```

D'abord, nous avons tourné le programme A pour une valeur de k égale à 3 et pour 5000 essais. la proportion de succès a été de 0.6228. Puis, avec une valeur de k égale à 16 et toujours pour 5000 essais, nous avons obtenu une proportion de succès de 0.8348. Puis, nous avons tourné le programme B pour 10000 valeurs de k entre 0 et 25 et avons obtenu une proportion de succès de 0.7737. Les valeurs des probabilités cherchées devraient être proches de ces valeurs empiriques.

Passons maintenant à la solution théorique. D'abord, puisque b et c varient entre -k et k, nous utiliserons une représentation graphique dans le plan cartésien, plus précisément un carré de dimensions 2k sur 2k centré à l'origine. Le coefficient b sera représenté par l'abscisse et le coefficient c par l'ordonnée.

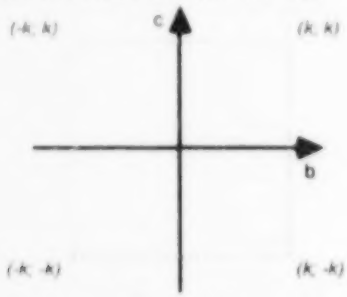


Figure 5.21

Si $x^2 + bx + c$ a des racines réelles, on a que $b^2 - 4c \geq 0$ c.-à-d. $b^2 \geq 4c$. Il est clair que si c est négatif, cette condition est réalisée. Si c est positif, il faut alors se limiter à la région sous la courbe $y = x^2/4$ située à l'intérieur du carré initial. Il reste alors à "placer" cette courbe dans le carré de dimensions 2k sur 2k. Selon la valeur de k ($k \leq 4$ ou $k \geq 4$), il y a les deux possibilités graphiques suivantes:

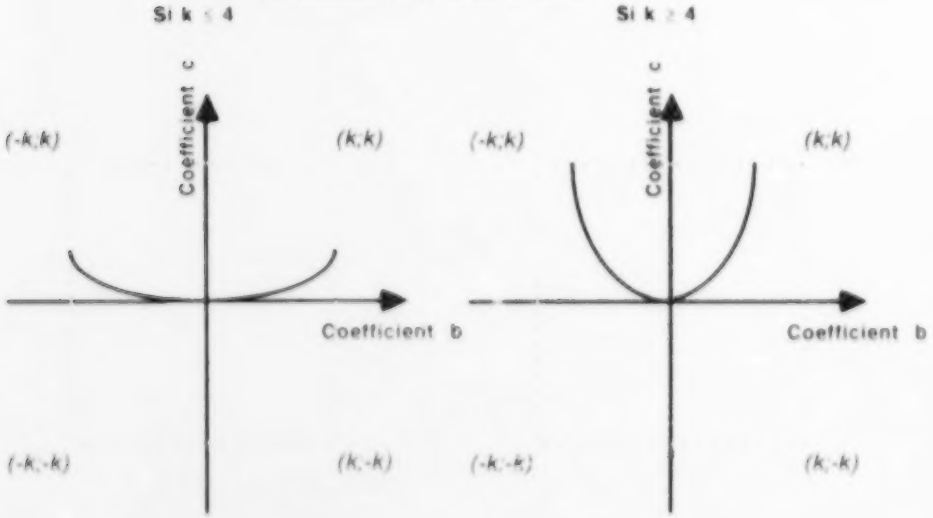


Figure 5.22

En effet,
$x^2/4 = k \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{k}$, ainsi la courbe $y = x^2/4$ coupera la droite $y = k$ lorsque $x = \pm 2\sqrt{k}$.
Par ailleurs, $2\sqrt{k}$ peut être à gauche comme à droite de k car
$2\sqrt{k} \leq k \Leftrightarrow 4k \leq k^2 \Leftrightarrow 4 \leq k$ (puisque $k>0$).
Sur le plan graphique, on a donc bel et bien deux possibilités: $k \leq 4$ et $k \geq 4$.

Soit R: Le polynôme généré au hasard possède des racines réelles.

a)
si $k \leq 4$

$$P(R) = \frac{2\int_0^k \frac{x^2}{4}\,dx + 2k^2}{4k^2} = \frac{k+12}{24}$$

si $k \geq 4$

$$P(R) = \frac{2\int_0^{2\sqrt{k}} \frac{x^2}{4}\,dx + 2[k(k-2\sqrt{k})] + 2k^2}{4k^2} = 1 - \frac{2}{3\sqrt{k}}$$

D'ailleurs, il est rassurant de constater que les deux expressions précédentes sont égales pour $k = 4$. De plus, pour $k=3$ et $k=16$, les valeurs de P(R) que nous fournissent ces formules (0,625 quand $k = 3$ et 0,8333 quand $k = 16$) sont très proches des valeurs empiriques obtenues par simulation à l'aide de notre programme A.

b)

$$P(R) = \int_0^4 \frac{k+12}{24}\,\frac{dk}{25} + \int_4^{25} \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{k}}\right)\frac{dk}{25} = \frac{58}{75} = 77{,}3\%$$

Ainsi, lorsque le nombre k est choisi au hasard entre 0 et 25, la probabilité que le polynôme généré possède des racines réelles est d'environ 77,3%. On constate alors que les simulations Monte Carlo faites auparavant ont donné des résultats empiriques très proches des résultats théoriques.

Exemple liant géométrie analytique, calcul intégral et probabilité

On lance au hasard un dard sur une cible ronde de 2 dm de rayon. Quelle est la probabilité que la pointe du dard soit plus près du centre que du contour? Ce problème est très simple et peut servir d'introduction au problème synthèse que nous vous proposerons ensuite. La région des cas favorables est un cercle de rayon de longueur égale à 1 dm alors que la région totale est un cercle de rayon de longueur égale à 2 dm. Le rapport des aires de ces régions est égal à 0,25 et correspond à la probabilité cherchée. Maintenant, passons à notre problème synthèse. Il s'agit du même problème sauf que la cible n'est plus un cercle de rayon de longueur égale à 2 dm mais un carré de côtés de longueur égale à 4 dm.

Un élève, démuni devant ce problème, peut utiliser l'ordinateur comme outil d'exploration. La construction de petits programmes exige bien sûr la connaissance d'un langage de programmation (tel le BASIC). Par ailleurs, la création de ces éléments d'exploration est, estimons-nous, à la portée de tout élève du collégial. Comme vous avez pu le constater dans les exemples précédents, le niveau de difficulté rencontré n'est sûrement pas plus élevé que celui qu'il connaît dans ses cours. Cette démarche exige une compréhension du problème, une clarification des conditions imposées et une certaine formalisation des idées émergentes, tous des éléments fort prometteurs dans l'élaboration d'une solution théorique. Voici donc, pour ce problème, les programmes que nous avons créés, les résultats qu'ils apportent et les commentaires qu'ils nous inspirent.

Le premier programme simule la situation décrite par le problème.

```
CLS
RANDOMIZE TIMER
succes=0
INPUT "Combien d'essais"; essais
FOR i=1 TO essais
  x=4*RND
  y=4*RND
  distanceT=x
  IF 4-x < x THEN distanceT=4-x
  IF y < distanceT THEN distanceT=y
  IF 4-y < distanceT THEN distanceT=4-y
  IF SQR((x-2)*(x-2)+(y-2)*(y-2)) < distanceT THEN succes=succes+1
LOCATE 16, 10: PRINT"essais no ";i
NEXT i
proportion=succes/essais
LOCATE 16,30: PRINT"La proportion de succès est", proportion
```

Ainsi, la simulation avec la méthode Monte Carlo, génère 668 réussites en 3000 essais, ce qui donne une fréquence-relative approximative de 22,27%. Mais à quoi ressemble le dessin des cas favorables à l'événement considéré? Le programme suivant simule plusieurs lancers de dard et affiche à l'écran les cas favorables. Voici le programme et un dessin qu'il a produit.

```
CLS
RANDOMIZE TIMER
succes=0 : xg=195:yh=76
INPUT "Combien d'essais", essais
LINE(xg,yh)-(xg+100,yh+100), ,b
FOR i=1 TO essais
  x=4*RND : xe=xg+25*x
  y=4*RND : ye=yh+100-25*y
  distanceT=x
  IF 4-x < x THEN distanceT=4-x
  IF y < distanceT THEN distanceT=y
  IF 4-y < distanceT THEN distanceT=4-y
  IF SQR((x-2)*(x-2)+(y-2)*(y-2)) < distanceT
        THEN succes=succes+1:PSET(xe,ye)
  LOCATE 13, 10: PRINT"essai no.";i
NEXT i
proportion=succes/essais
LOCATE 13,30: PRINT"La proportion de succès est", proportion
```

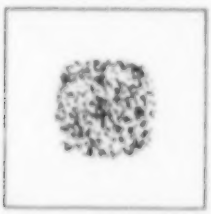


Figure 5.23

Peut-on avoir une représentation encore plus précise de l'ensemble des cas favorables? Le court programme suivant permet un "balayage" systématique de la cible et produit à l'écran une telle représentation.

```
CLS
xg=145:yh=26
LINE(xg,yh)-(xg+200,yh+200), ,b
FOR ye=yh TO yh+200
  FOR xe=xg TO xg+200
    x=(xe-xg)/50:y=(200-ye+yh)/50:distanceT=x
    IF 4-x<distanceT THEN distanceT=4-x
    IF y<distanceT THEN distanceT=y
    IF 4-y<distanceT THEN distanceT=4-y
    IF (x-2)*(x-2)+(y-2)*(y-2)<distanceT*distanceT THEN PSET(xe,ye)
  NEXT xe
NEXT ye
```

Figure 5.24

Cette représentation graphique (Figure 5.24) "annonce" la région des cas favorables. Tous ces éléments nourissent l'intuition de l'élève, lui fournissent des pistes et d'une certaine façon, le stimulent à fournir des explications aux phénomènes observés. En s'inspirant tout particulièrement du dernier graphique obtenu, débutons notre solution théorique par une représentation graphique que nous allons commenter puis modifier.

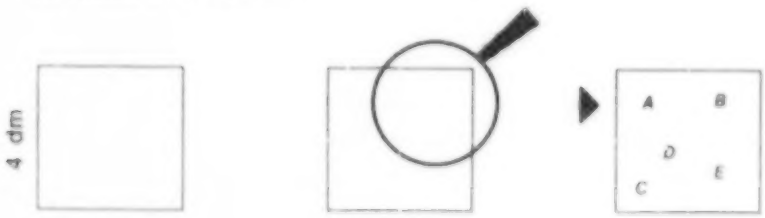


Figure 5.25

La cible initiale est le carré de 4 dm de côté représenté à gauche (Figure 5.25). Nous pouvons partager cette cible en 4 parties égales (au milieu de la même figure) puis faire en son centre un cercle de rayon égal à 1 dm. À cause des exigences du problème et de la symétrie de la représentation, on peut se limiter à étudier le carré supérieur droit de 2 dm de côté qui a été agrandi (à droite, Figure 5.25). Finalement, pour faciliter notre discussion, nous avons ajouté une ligne horizontale et une ligne verticale pour découper cette sous-région en 4 carrés de 1 dm de côté.

Pour tout point des régions A, B et E, il est clair que la distance au contour est inférieure à celle de la distance au centre. Aucun cas favorable ne se retrouve dans ces régions. Les points de la région C sont situés à une distance du centre inférieure à 1 dm et supérieure à 1 dm du contour. Ils font donc partie de la région des cas favorables. Pour ce qui est des points de la région D, ils sont à une distance supérieure à 1 dm du centre et également supérieure à 1 dm du contour.

Une analyse plus approfondie s'avère nécessaire pour les départager. Pour ce, reproduisons le quart supérieur-droit de la cible carrée (Figure 5.26) en y ajoutant une diagonale à 45° car la distance d'un point donné au contour est exprimée différemment de part et d'autre de cette diagonale. Imaginons un système d'axes parallèles aux côtés du carré et centré au coin inférieur gauche.

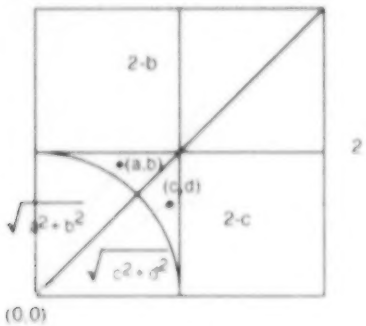


Figure 5.26

Dans la région au-dessus de la diagonale, les points dont la distance au centre est plus petite que la distance au contour répondent algébriquement à la condition suivante :

$$a^2 + b^2 < 2 - b$$

Or,

$$a^2 + b^2 < 2 - b \rightarrow a^2 + b^2 < 4 - 4b + b^2 \rightarrow b < 1 - \frac{a^2}{4}$$

Il faut alors déterminer le point de rencontre entre la droite $y = x$ et $y = 1 - \frac{x^2}{4}$. Ainsi,

$$y = x \text{ et } y = 1 - \frac{x^2}{4} \rightarrow x = 1 - \frac{x^2}{4} \rightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow x = -2 + 2\sqrt{2}$$

Dès lors, il faudra calculer l'aire de la surface sous la courbe $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ entre 0 et $-2 + 2\sqrt{2}$.

Dans la région sous la diagonale, les points dont la distance au centre est plus petite que la distance au contour répondent algébriquement à la condition suivante :

$$c^2 + d^2 < 2 - c$$

Or,

$$c^2 + d^2 < 2 - c \rightarrow c^2 + d^2 < 4 - 4c + c^2 \rightarrow d < \sqrt{4 - 4c}$$

Ici, il faudra calculer l'aire de la surface sous la courbe $y = \sqrt{4 - 4x}$ entre $-2 + 2\sqrt{2}$ et 1.

En résumé, notre tâche consiste à calculer l'aire de la région qui se situe simultanément sous les deux courbes tracées. On peut y parvenir, entre autres, en calculant l'aire des régions F et G de la figure 5.27.

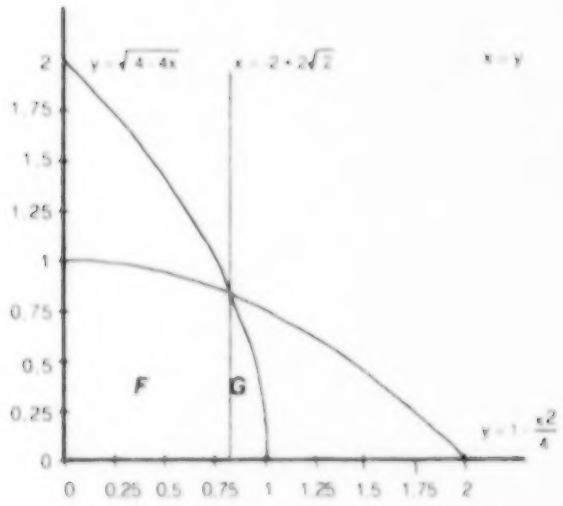


Figure 5.27

La somme des aires correspondant aux régions F et G se calcule de la manière suivante

$$\int_{0}^{2+2\sqrt{2}} 1 - \frac{x^2}{4}\,dx + \int_{2+2\sqrt{2}}^{1} \sqrt{4 - 4x}\,dx$$

$$= \frac{8 + 4\sqrt{2}}{3} + \frac{6336 - 4480\sqrt{2}}{6}$$

$$\approx 0.7810 + 0.0448 \approx 0.8758$$

En désignant par A l'événement consistant à choisir un point au hasard qui soit plus près du centre que du contour de la cible, on peut alors conclure

$$P(A) = \frac{\text{aire de la région des cas favorables}}{\text{aire de la région totale}} = \frac{4 \times 0.8758}{16} \approx 21.9\%$$

Ainsi, il y a environ 21,9% des chances qu'un point de la cible choisi au hasard soit plus près du centre de la cible carrée que de son contour. Cette probabilité est relativement près de 22,27%, pourcentage obtenu empiriquement par notre programme.

5.5 Un exemple élaboré d'illustration du modèle

Nous n'avons pas crû nécessaire d'apporter des exemples des autres éléments du modèle (exercice compte-gouttes, exercice de routine ou problème d'assimilation, problème d'enrichissement, problème défi). Sous diverses formes ou appellations et avec une fréquence variable, il est possible de rencontrer ces éléments dans le matériel didactique utilisé au collégial. Par ailleurs, il serait injustifié de passer sous silence une publication qui a été en grande partie bâtie selon le modèle d'enseignement élaboré à la section 4 et qui nous apparaît complémentaire au présent rapport de recherche. Il s'agit de "Prob-habiletés: une pédagogie active de l'apprentissage des probabilités" rédigé par André Reumont, un des co-auteurs du PROJET MATHÉTACTIQUES. Ce volume de 200 pages dont la rédaction s'est échelonnée sur 5 ans regroupe 24 activités d'exploration, 49 exercices compte-gouttes, 113 exercices de routine ou problèmes d'assimilation, 78 problèmes d'enrichissement, 13 problèmes défi et constitue un exemple détaillé d'illustration du modèle. Ce document s'est mérité une mention au concours du Prix du Ministre en 1988 et s'est vu attribuer le prix Frère Robert de l'A.M.Q. en 1990. On peut l'obtenir auprès de l'auteur en utilisant les coordonnées du Collège de Maisonneuve.

6

SUITES DU PROJET

6. SUITES DU PROJET

Dans cette section, nous allons livrer quelques commentaires liés aux difficultés d'implantation du modèle d'enseignement proposé et lever le voile sur certaines perspectives d'avenir. Plus précisément, il nous apparaît important d'analyser certaines difficultés d'organisation sur le plan du matériel didactique et de l'évaluation et de prévoir certaines retombées potentielles concernant l'aide à l'apprentissage. Nous analysons également le rôle que pourraient jouer les nouvelles technologies dans l'implantation du modèle. Finalement, des commentaires généraux concernant la recherche en apprentissage et son impact en enseignement des mathématiques vont compléter cette section.

6.1 Le matériel didactique

Les exemples présentés à la section 5 ont permis d'illustrer le modèle d'enseignement élaboré à la section 4. Peu nombreux, ces exemples ne peuvent permettre une expérimentation au sens large du modèle à l'intérieur d'un cours. Sur ce plan, il y a encore énormément de travail à faire. Dans cette veine, il a été mentionné à quelques reprises (Faulkner (1989) et Association Mathématique du Québec (Mémoire 1991)) qu'une lourde tâche attend le professeur de mathématiques du collégial pour la prochaine décennie. Or, il est possible de traduire les éventuelles retombées du présent projet dans le sens d'un allégement de cette tâche. En effet, actuellement, tout professeur de mathématiques peut se sentir débordé par les exigences de renouvellement de son métier. Il doit s'interroger sur ses pratiques pédagogiques et sur la pertinence de certains contenus tout en cherchant à intégrer harmonieusement les nouveaux outils technologiques. Chaque professeur peut ressentir qu'il a tout à faire, isolément de son côté. Qu'on ne se leurre pas, l'isolement des professeurs dont parlait l'*Étude de la pratique professionnelle des enseignants et enseignantes de cégep* (Grégoire, Turcotte et Dessurault, 1985) est encore bien présent aujourd'hui. Il est plus que temps que l'on imagine de nouveaux moyens pour rapprocher les enseignants et leur permettre d'oeuvrer dans une démarche véritablement collective.

Pour cela, il faudrait que "la" tâche d'enseignement soit décomposée et c'est sûrement un des avantages de notre modèle d'enseignement. En effet, il y a différentes constituantes au modèle et chaque professeur peut apporter sa contribution pour enrichir le matériel didactique des différents cours. Il n'est pas nécessaire que tout professeur s'engage dans le marathon de la production d'un volume ou d'un didacticiel mais chacun, à son propre rythme, peut développer des éléments originaux: une activité d'exploration, une série d'exercices compte-gouttes, quelques problèmes-synthèse ... Ainsi, le modèle d'enseignement pourrait être implanté graduellement dans plusieurs cours. Au fil des années, il est réaliste d'imaginer qu'on pourra établir des banques informatisées comportant les différents éléments du modèle: banque d'activités d'exploration, banque de problèmes d'assimilation, banque de situations prospectives ... Un babillard électronique, par exemple, permettrait une alimentation continue de ces banques et, par le fait même, une diffusion de ces réalisations pédagogiques. On pourrait ainsi briser l'isolement néfaste des professeurs. Par ailleurs, indépendamment du moyen technique de support, la structure du modèle d'enseignement permet aux enseignants de contribuer au mouvement collectif requis par la réforme pédagogique que nous préconisons.

Précisons davantage les détails de cette participation en nous inspirant de l'exemple suivant. Récemment, aux États-Unis, la maison d'édition Merrill visait la publication d'une collection de livres en mathématiques de la maternelle à la 8ième année. Dans le numéro de septembre 1989 de la revue *Mathematics Teacher*, cette maison demanda aux professeurs de faire parvenir des activités simples, faciles à réaliser, qui illustrent et renforcent les concepts mathématiques (du genre de nos activités d'exploration). On offrait 100$ pour chaque activité publiée et 1000$ pour la meilleure. À cette occasion, le président de la compagnie Merrill déclara: "Les professeurs ont plus de connaissances concernant ce qui fonctionne avec les enfants que tous les éditeurs du monde." On voyait là aussi une occasion de partager des idées entre les professeurs de tout le pays.

Ici, on pourrait calquer cette pratique et récompenser les professeurs qui produisent du matériel servant à la collectivité. On peut envisager deux possibilités. L'une serait de former un jury de personnes compétentes dont la tâche serait de sélectionner les éléments devant faire partie des bases informatisées. Des prix, selon des modalités à déterminer, pourraient être attribués aux auteurs.

Une autre serait d'incorporer toutes les idées reçues dans les bases informatisées. Le taux d'utilisation des éléments serait la mesure permettant aux auteurs d'être récompensés de leurs efforts. On pourrait alors mettre sur pied un mode de rétribution des droits d'auteur semblable à celui utilisé pour la reprographie de textes. Ainsi, toute utilisation importante d'éléments produits par un professeur pourrait lui mériter une certaine compensation. Par exemple, une bonne activité d'exploration du concept de la dérivée utilisée par une centaine de professeurs du collégial et expérimentée par des milliers d'élèves ne mériterait-elle pas d'être reconnue? N'oublions pas que, dans les prochaines années, il faudra être inventif... et productif. Dans le fond, nous suggérons ici une reconnaissance du travail du professeur afin de l'encourager, de le stimuler et de lui permettre de produire et de partager de nouvelles idées pédagogiques avec les autres membres du corps professoral.

Après avoir exploré les actions à entreprendre pour faciliter la production de matériel didactique nécessaire à l'implantation du modèle d'enseignement proposé, attardons-nous à la situation de l'élève. Le "choc culturel" risque d'être grand pour l'élève qui s'inscrit à un cours construit selon notre modèle d'enseignement. Il risque d'être ébranlé dans ses conceptions des mathématiques, du rôle du professeur, de son propre rôle et de ses responsabilités. Une attitude de transparence où le professeur présente à l'élève ses vues sur l'apprentissage, sur les mathématiques, sur les besoins de la société, sur le virage technologique s'impose. Une clarification de tous ces éléments est nécessaire afin que les efforts de l'élève portent vraiment et qu'ils revêtent la signification voulue. En effet, de récentes recherches sur la motivation (Brandt, Marzano & Pickering, 1990) indiquent qu'une personne aborde presque toujours une tâche avec un ensemble d'attitudes et de perceptions qui influencent grandement sa performance. D'ailleurs, selon un résumé de l'état des recherches sur la motivation (Brophy, 1987), cette dernière serait le "produit de l'attente par la valeur". On parle ici de l'attente de l'apprenant à mener à bien ses études sur un sujet donné et de la valeur qu'il rattache personnellement à cette démarche. Ainsi, l'apprenant qui ne s'attend pas à réussir ou encore qui ne croit pas à l'importance de la démarche intellectuelle qu'il va entreprendre ne sera pas motivé.

Or, la valeur rattachée à un apprentissage demande de l'information sur les objectifs poursuivis et les moyens utilisés pour les atteindre. Nous croyons que l'élève de l'ordre collégial possède la maturité intellectuelle requise pour comprendre pourquoi il doit développer des habiletés en résolution de problèmes, pourquoi il doit être actif dans l'acquisition du savoir, pourquoi il doit participer à du travail coopératif. Dans cet esprit, nous croyons qu'il faudrait produire un "Guide de sensibilisation pour l'élève" où toutes ces idées seraient exposées dans un langage simple, à la portée de tous. On pourrait même prévoir des périodes d'échange afin de discuter et de secouer les idées préconçues. Cela nous semble une condition d'une absolue nécessité à l'implantation du modèle.

6.2 L'évaluation

L'évaluation est une composante importante du processus éducatif. Non seulement elle fournit à chaque élève des renseignements utiles sur l'état de ses apprentissages mais aussi elle éclaire l'enseignant sur la valeur de l'organisation du contenu, la pertinence des objectifs poursuivis et l'efficacité des moyens pédagogiques mis en oeuvre. Actuellement, nous estimons que trop souvent l'évaluation se cantonne à la mesure d'objectifs spécifiques d'ordre cognitif et que les moyens d'évaluation utilisés sont limités. Nous croyons à une portée accrue et à une diversification des méthodes d'évaluation.

Dans le modèle d'enseignement que nous mettons de l'avant, l'évaluation porte sur la compréhension et l'utilisation des éléments mathématiques à l'étude ainsi que sur la compétence en résolution de problèmes. Tous ces éléments s'insèrent bien dans la logique du modèle. De plus, comme la poursuite d'objectifs concernant la capacité à travailler en équipe et à communiquer les mathématiques est cohérente avec le modèle d'enseignement, certains pourraient être tentés de chercher à évaluer ces objectifs. D'ailleurs, les méthodes d'évaluation devraient s'aligner sur les méthodes d'enseignement. Il reste que ces derniers aspects, tout comme la compréhension et l'utilisation des connaissances ainsi que la compétence en résolution de problèmes sont difficiles à évaluer. Faut-il évaluer tous ces éléments? Sinon, quels sont les éléments qu'il faut retenir? Est-il possible de les évaluer? Comment le faire? Comment les pondérer? Des outils existent-ils? Il y a donc là amplement matière à recherche.

Pour parfaire le processus d'évaluation, il faudra considérer des moyens d'évaluation plus diversifiés. Ainsi, on pourrait penser:

- à un journal de bord,
- à un cahier où l'élève rédige ses solutions aux différents problèmes et exercices,
- à une présentation orale d'une solution ou d'un sujet mathématique,
- aux devoirs,
- aux «quizz»,
- aux discussions en groupe-classe,
- au travail d'équipe,
- à l'entrevue,
- aux projets,
- aux longs examens, aux examens de synthèse.

L'évaluation peut se faire autant sur une base individuelle que sur la base de petits groupes, en classe ou à l'extérieur. Dans le cadre actuel, les groupes-cours comportent souvent un nombre d'élèves trop élevé si bien qu'il est difficile pour l'enseignant de procéder à l'évaluation avec des moyens non conventionnels.

Par exemple, évaluer la participation des élèves aux différentes activités relève du tour de force. Dans l'esprit d'une diversification des moyens d'évaluation, nous considérons essentiel que soit produit du matériel original.

Comme éléments de matériel requis, nous pensons à :

- des banques de problèmes (particulièrement des problèmes intra-cours et inter-cours ainsi que des problèmes d'enrichissement);
- des projets;
- des banques de questions visant spécifiquement à mesurer la compréhension;
- des banques d'examens traditionnels.

Il se produit très certainement dans nos collèges du matériel très valable sur le plan de l'évaluation mais souvent sur une base personnelle ou très locale. la collectivité n'en est pas informée. Il importe de trouver des nouveaux moyens pour inciter les enseignants à produire ce type de matériel et à le partager. Il est dans l'intérêt de tous que les bonnes idées parcourent tout le réseau.

Parmi les nouveaux moyens à exploiter, le potentiel énorme de l'ordinateur n'a pas encore été mis à contribution, particulièrement en évaluation formative. En effet, l'ordinateur, parce qu'il peut garder en mémoire toute la démarche d'un élève dans l'accomplissement d'une tâche, peut proposer à celui-ci une analyse de ses erreurs et souligner ses points forts. D'intéressantes statistiques relatives à une classe ou à plusieurs classes, portant sur une ou plusieurs sessions, pourraient en résulter et fournir ainsi au professeur de précieux renseignements permettant de mieux connaître les clientèles et d'améliorer l'enseignement et le matériel didactique utilisé.

Somme toute, nous considérons que l'évaluation sommative devrait avoir une portée beaucoup plus large et que l'évaluation formative pourrait être améliorée grâce aux moyens technologiques. Dans ce dossier, la prudence est toutefois requise et des recherches sont vivement souhaitées afin de préciser les nouvelles facettes que devrait comporter l'évaluation et les moyens concrets d'intégrer les éléments retenus à nos pratiques pédagogiques.

Par exemple, évaluer la participation des élèves aux différentes activités relève du tour de force. Dans l'esprit d'une diversification des moyens d'évaluation, nous considérons essentiel que soit produit du matériel original.

Comme éléments de matériel requis, nous pensons à :

- des banques de problèmes (particulièrement des problèmes intra-cours et inter-cours ainsi que des problèmes d'enrichissement),
- des projets,
- des banques de questions visant spécifiquement à mesurer la compréhension,
- des banques d'examens traditionnels.

Il se produit très certainement dans nos collèges du matériel très valable sur le plan de l'évaluation mais souvent sur une base personnelle ou très locale; la collectivité n'en est pas informée. Il importe de trouver des nouveaux moyens pour inciter les enseignants à produire ce type de matériel et à le partager. Il est dans l'intérêt de tous que les bonnes idées parcourent tout le réseau.

Parmi les nouveaux moyens à exploiter, le potentiel énorme de l'ordinateur n'a pas encore été mis à contribution, particulièrement en évaluation formative. En effet, l'ordinateur, parce qu'il peut garder en mémoire toute la démarche d'un élève dans l'accomplissement d'une tâche, peut proposer à celui-ci une analyse de ses erreurs et souligner ses points forts. D'intéressantes statistiques relatives à une classe ou à plusieurs classes, portant sur une ou plusieurs sessions, pourraient en résulter et fournir ainsi au professeur de précieux renseignements permettant de mieux connaître les clientèles et d'améliorer l'enseignement et le matériel didactique utilisé.

Somme toute, nous considérons que l'évaluation sommative devrait avoir une portée beaucoup plus large et que l'évaluation formative pourrait être améliorée grâce aux moyens technologiques. Dans ce dossier, la prudence est toutefois requise et des recherches sont vivement souhaitées afin de préciser les nouvelles facettes que devrait comporter l'évaluation et les moyens concrets d'intégrer les éléments retenus à nos pratiques pédagogiques.

6.3 L'aide à l'apprentissage

Dans le cadre de l'aide à l'apprentissage, nous allons d'abord présenter quelques commentaires concernant tous les élèves. L'extrait suivant d'un document d'Aylwin (1990) situe notre intervention:

> Comme nous l'avons vu, le trajet neuronal parcouru par un stimulus, ou groupe de stimuli, laisse derrière lui un train d'engrammes, que l'on pourrait comparer au sillon gravé sur un disque de vinyle: chaque fois qu'on fera jouer le disque, l'aiguille suivra le sillon initial; de même, chaque fois que tel concept sera présenté à l'élève, le cerveau de celui-ci le "traitera", de préférence, à travers le même circuit neuronal que celui utilisé la première fois qu'il fut "engrammé". La conséquence pédagogique de ce fait est évidente: il faut accorder un soin tout particulier à la stratégie qu'on utilise lorsqu'on met les élèves en présence d'un concept pour la première fois.

Bien que ce ne soit pas souhaitable, on peut parachuter à l'élève des connaissances. On va ainsi fortement influencer les engrammes reliés au premier contact avec un concept. Par ailleurs, on doit reconnaître que cette façon de faire laisse des traces! En effet, ce genre d'engrammes n'a pas nécessairement le meilleur effet sur l'apprentissage. Nous croyons qu'il faut laisser davantage d'initiative à l'élève dans sa recherche de stimuli menant à la création d'engrammes. Nous y voyons là un appui au constructivisme. Également, nous estimons que le constructivisme offre de nouvelles perspectives quant aux activités pédagogiques à employer pour aider les élèves ayant des difficultés d'apprentissage . Dans les questions d'aide à l'apprentissage, une maxime fréquemment employée est celle rapportée par Blais (1988) qui cite Suydam: "donner un maximum d'explications et de directives". Les constructivistes réalisent que les études scientifiques utilisées pour appuyer cette maxime sont basées sur des théories inadéquates du savoir. Plusieurs études (Davis & Maher, 1990) suggèrent que les tentatives pour corriger les erreurs des élèves ont été fructueuses à court terme, mais pas à long terme.

Les mesures palliatives surviennent habituellement dans une forme magistrale suivie d'exercices de type répétitif et sont en tout point conformes avec la maxime citée précédemment. Or cette maxime implique la définition d'"écouteur" au rôle tenu par l'élève. Un tel rôle contribue à la dépendance, élimine le besoin de penser par soi-même et ne suscite pas le développement de l'initiative chez l'élève. L'habitude de dépendance et la croyance en sa propre incapacité assurent le novice qu'il va en demeurer un. Cette maxime laisse pourtant sous-entendre que la vie intellectuelle sera rendue plus facile et meilleure alors qu'elle devient superficielle et sans réelle valeur. Une approche plus prometteuse est d'essayer de comprendre ce que font les élèves, les motifs de leurs actions tout en leur fournissant l'opportunité de saisir pourquoi leurs propres raisonnements sont incorrects. Les conceptions erronées font référence aux théories que les élèves ébauchent pour expliquer différents phénomènes, théories qui sont fausses du point de vue de l'adulte. Bien que leur conception d'une notion ou d'un procédé puisse avoir été merveilleusement élaborée, elle peut être basée sur de fausses hypothèses, de fausses interprétations, des constructions non validées, un manque d'information ou des données incorrectes. En fait, les erreurs systématiques sont le résultat d'une tentative active de l'apprenant de rendre l'univers signifiant. Ces erreurs nous offrent une fenêtre dans la pensée de l'élève (Baroody & Ginsburg, 1990) et ces irrégularités

sont tenaces, comme les engrammes qui les contiennent. Ainsi, la tâche de l'enseignant, après avoir recherché la source de ces irrégularités est de structurer l'apprentissage dans lequel l'élève va expérimenter le déséquilibre et, subséquemment, l'adaptation.

L'enseignant ne peut tout de même pas demander à l'élève, sans contribution extérieure, de voir à l'adaptation de son savoir en inventant de toutes pièces de nouveaux schèmes mentaux. Encore une fois, rappelons que le constructivisme ne se réfère qu'aux processus psychologiques internes. Grâce à ces processus, le savoir est acquis dans l'action. Cependant, la littérature ne spécifie jamais de quel type d'actions il s'agit. L'enseignant doit découvrir et offrir les opportunités intellectuelles où de telles actions peuvent survenir. Par exemple, pour les conceptions erronées persistantes que nous avons décrites chez Ruth et Jeremy, il faudrait imaginer une activité (sous forme de jeu ou autre) dans laquelle les élèves auraient à ordonner différents nombres décimaux en exploitant, par exemple, la représentation graphique et souhaiter que cette activité les mette devant des conflits à résoudre exigeant qu'ils prennent des décisions.

En ouvrant une parenthèse sur la question des cours d'appoint dans les collèges, il faut malheureusement convenir que les classes de 40 élèves ne sont pas tellement propices au type d'interventions de nature constructiviste! Ces classes regroupent des élèves ayant vécu en mathématiques des expériences et des déceptions multiples. Chacun a sa propre histoire et l'enseignement de masse, impersonnel, ne leur convient pas. Il y a donc une certaine individualisation de l'enseignement qui apparaît nécessaire. Par ailleurs, bien que les difficultés soient variables d'un individu à l'autre, on constate la récurrence de conceptions erronées (la règle de Ruth, la règle de Jeremy, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$...). On pourrait prévoir des "activités de redressement" pour corriger de telles conceptions. À ce titre, des logiciels appropriés pourraient rendre possible un enseignement plus individualisé et permettre à l'élève une constante rétroaction face à ses actions. Nous estimons que la mise sur pied d'un véritable centre d'aide en mathématiques exige, de façon prioritaire, la production de tels logiciels.

Au fait, il n'y a aucune garantie que le tutorat par les pairs, pratique actuellement à la mode, va régler des problèmes de cette nature. L'"élève-expert", malgré sa bonne volonté, se limite à des explications conventionnelles, souvent plus près de l'aspect technique que des fondements. Pour l'élève en difficulté, nous croyons que c'est peine perdue. Cette relation d'aide relève effectivement d'un "expert" car elle demande de l'observation, de l'écoute, une grande maîtrise des concepts étudiés et surtout une compréhension profonde des processus d'apprentissage: ce travail est définitivement celui d'un enseignant.

Enfin, les problèmes soulevés ici ne sont pas propres à un collège particulier. Tous les collèges les connaissent à divers degrés. Des recherches en ce domaine nous semblent urgentes. Il est temps d'appuyer les enseignants qui doivent dispenser ces cours d'appoint ou encore qui ont des élèves en sérieuses difficultés d'apprentissage liées à leurs acquis antérieurs. Une politique de non-intervention des autorités en ce domaine équivaut à une indifférence totale et à une demande quotidienne de miracles auprès de cette clientèle. Tout cela ne cadre absolument pas avec les pieux discours sur l'accessibilité aux études post-secondaires.

6.4 Les nouvelles technologies

Les innovations technologiques, principalement les ordinateurs et les calculatrices, ont pénétré notre environnement scolaire. Le domaine des mathématiques ne fait pas exception et, sans prétendre être devins, nous pouvons affirmer que leur influence sur l'enseignement et l'apprentissage dans ce domaine sera marquante. Citons un passage des *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991) du N.C.T.M. qui précise:

> La technologie est une force vitale dans l'apprentissage, l'enseignement et la pratique des mathématiques, fournissant de nouvelles approches de résolution de problèmes et influençant la nature des questions qui sont sous investigation. Elle devrait jouer un rôle significatif dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La technologie peut être utile d'une variété de façons pour améliorer et accroître la portée de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques. Les domaines les plus prometteurs, et de loin, sont ceux de la formulation et de la résolution de problèmes par le biais d'activités qui permettent aux élèves de concevoir leurs propres explorations et de créer leurs propres mathématiques. La technologie change la nature et déplace l'accent du contenu mathématique autant que les stratégies pédagogiques utilisées pour les enseigner.

Le développement d'habiletés à appliquer des procédures de calcul (résolution d'un système d'équations linéaires, inversion d'une matrice, évaluation d'un déterminant, détermination de valeurs propres, calcul d'une limite, d'une dérivée, d'une intégrale, d'un coefficient de corrélation...) qui occupait une place importante dans l'apprentissage des mathématiques devient beaucoup moins essentiel. Dans bien des cas, ces procédures peuvent être prises en charge par un ordinateur et même par des calculatrices sophistiquées telles la HP 28. Ici, une mise en garde et une clarification s'imposent. Nous ne voulons pas former des "pitonneux" ne sachant pas ce qu'ils demandent à l'ordinateur d'exécuter. Nous sommes conscients que le "syndrôme du bouton" en inquiète plusieurs. Il faut que l'élève développe une compréhension des procédures de calcul qu'il aura à effectuer et même, une certaine habileté manuelle à effectuer ces calculs.

Par ailleurs, l'élève doit aussi développer son jugement afin qu'il utilise les moyens informatiques dans les moments opportuns. D'une part, lorsqu'il voit des calculs qu'il pourrait rapidement effectuer, il les exécute avec papier et crayon. D'autre part, les calculs plus longs dont il saisit la signification peuvent être confiés à l'ordinateur. L'habileté à appliquer des procédures de calcul perd donc de son importance. Le seuil d'habileté manuelle exigé de l'élève devient moins élevé et cela devrait libérer un précieux temps d'enseignement pour des apprentissages plus fondamentaux. Ainsi, dans les *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991), on affirme:

> La technologie - les ordinateurs et les calculateurs - font sauver du temps et, encore plus important, donne accès aux élèves à de nouveaux moyens puissants d'exploration de concepts à une profondeur qui n'était pas possible auparavant.

6. Suites du projet

Traditionnellement considérées comme le royaume des déductions abstraites, les mathématiques voient s'ajouter une dimension expérimentale grâce à l'utilisation des nouvelles technologies. Dans certaines situations, un élève peut, à l'aide de l'ordinateur, émettre plus d'hypothèses et en étudier plus facilement la validité. Il peut considérer plusieurs facettes d'une même situation. L'ordinateur pourrait ainsi jouer un rôle majeur dans les activités d'exploration proposées par notre modèle d'enseignement.

Parmi les moyens puissants mis à notre disposition par les ordinateurs, soulignons l'énorme capacité de représentation graphique. En mathématiques, cela se traduit par une importance accrue des modes de représentation. Par exemple, il est plus facile de produire:

- le graphique d'une fonction à une ou deux variables,
- un arbre de probabilités,
- un nuage de points,
- un histogramme,
- un polygone de fréquences,
- un polygone des contraintes en programmation linéaire,
- les différentes courbes de distribution statistique,
- des graphiques de vecteurs et de nombres complexes.

Ainsi, les ordinateurs et certaines calculatrices permettent de représenter des concepts mathématiques de façon simple et rapide. On peut ainsi communiquer plus facilement les mathématiques, construire des images mentales de concepts abstraits et développer l'intuition. Les représentations jouent un rôle important autant en mathématiques que dans leur apprentissage. Voici ce qu'on en dit dans *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991):

> Les représentations sont cruciales pour le développement de la pensée mathématique et, à travers leur utilisation, les idées mathématiques peuvent être modélisées, d'importantes relations identifiées et clarifiées et la compréhension peut être favorisée.

Ainsi, les capacités de représentation des ordinateurs (et à un degré moindre celles des calculatrices graphiques) permettent de construire des environnements d'apprentissage où l'élève peut vivre des expériences favorisant la construction d'un savoir riche et bien organisé. Voilà qui s'insère bien dans le modèle que nous avons élaboré. Il est permis de croire que l'ordinateur sera un précieux allié.

La puissance de calcul de l'ordinateur en fait un outil important à l'implantation du modèle d'enseignement. Les ordinateurs mettent à notre disposition toutes sortes de moyens de calcul autant numériques que symboliques. On n'a qu'à penser aux chiffriers électroniques (par exemple *Lotus 1-2-3*, *Excel*), aux logiciels de manipulation symbolique (par exemple *Derive*, *Mathematica* ou *Theorist*) ou encore aux logiciels qui appliquent de nombreuses procédures mathématiques (comme *Mathcad*). Ces moyens, bien utilisés, peuvent fournir à l'élève une rétroaction aux gestes qu'il pose et l'informer sur sa compréhension des éléments mathématiques et sur l'état de ses habiletés. L'élève a ainsi à sa disposition des moyens qui permettent plusieurs approches pouvant l'informer de la justesse de sa démarche.

Illustrons cela d'un exemple. Un élève vient de résoudre un problème d'optimisation selon la procédure proposée dans son cours de calcul différentiel et intégral. Il a obtenu une réponse et s'interroge sur sa validité. À l'aide d'un chiffrier électronique, il peut calculer différentes valeurs de la fonction à optimiser pour des valeurs de la variable indépendante choisies aux environs de la valeur trouvée. Il peut également tracer la courbe de la fonction à optimiser à l'aide d'un logiciel permettant le tracé de courbes (tel *Anugraph*) et en localiser l'optimum avec un assez bon degré de précision. Il peut alors confronter sa réponse avec ce que lui propose l'ordinateur et tirer les conclusions qui s'imposent. Sur le plan de l'apprentissage, tout cela est certainement plus valable que de consulter la liste des réponses que fournit le livre utilisé par l'élève.

La présence des ordinateurs et des calculatrices influence le domaine des mathématiques. En conséquence, leur utilisation impose une modification de l'enseignement de cette discipline. Les mathématiques ne se limitent plus à la déduction abstraite mais comprennent aussi l'observation et l'expérimentation. Les enseignants de mathématiques ont donc à s'attaquer à des questions importantes soulevées par l'intégration de la technologie dans l'éducation. Quels changements devons-nous apporter au contenu des cours de mathématiques? Quels changements devons-nous apporter à notre façon d'enseigner les mathématiques? Nous ne proposons pas de réponses à ces questions mais nous croyons que l'ordinateur et la calculatrice perfectionnée pourraient jouer un rôle de premier plan dans la concrétisation de notre modèle d'enseignement. Ces outils s'insèrent bien dans le modèle et constituent de précieux alliés au professeur. Bien sûr, le matériel didactique requis est à produire et à expérimenter, mais il y a là une avenue fort prometteuse que l'on doit emprunter.

6.5 Recherche en apprentissage et enseignement des mathématiques

L'étude des mathématiques date de quelques milliers d'années et a pris une importance considérable au cours des siècles. La didactique des mathématiques, comme discipline, date de moins d'un siècle. Il est tout de même curieux de constater que les mathématiques soient si âgées et l'étude de l'enseignement de cette discipline si jeune. Depuis le tournant du siècle, nous pouvons tout de même avancer que l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ont été des préoccupations centrales dans les recherches sur l'éducation. Le désir d'améliorer l'efficacité de cet enseignement a stimulé un large éventail d'études conçues pour comprendre le développement des habiletés mathématiques et les statégies qui produisent un apprentissage optimal.

La nature hautement structurée du savoir mathématique a aussi attiré l'attention de quelques psychologues qui ont utilisé l'apprentissage des mathématiques comme véhicule de recherche pour dégager des principes généraux de l'apprentissage humain. En contre-partie, on a vu les didacticiens en mathématiques afficher un plus grand intérêt dans les récents travaux des psychologues. Ceci est dû, en partie du moins, à la redécouverte de l'apprentissage comme un important sujet de la psychologie. Influencés par le courant behavioriste, les chercheurs ont d'abord ignoré l'apprentissage dans leurs premiers travaux, choisissant de se concentrer presqu'exclusivement sur les performances. Toutefois, récemment, la communauté scientifique travaillant sur la cognition a commencé à montrer un grand enthousiasme à étudier les mécanismes de l'apprentissage.

On parle alors de science cognitive. Cette jeune science (née il y a un quart de siècle) s'intéresse au fonctionnement de la pensée et par conséquent à la représentation de la connaissance, aux processus de langage, aux processus d'imagerie mentale, à l'apprentissage, à la mémoire, à la résolution de problèmes et aux processus cognitifs. L'hypothèse fondamentale sur laquelle repose la science cognitive est que les structures mentales et les processus cognitifs sont extrêmement riches et complexes mais que ces structures peuvent être comprises et que cette compréhension devrait nous fournir des indications sur la façon dont la pensée et l'apprentissage s'opèrent.

Les résultats de cette science pourront stimuler le milieu de l'enseignement des mathématiques. Si on comprend mieux comment les mathématiques sont apprises, cela devrait aider à concevoir un enseignement plus efficace. Il y a là un grand besoin car en dépit des nombreuses recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, les résultats de ces recherches offrent peu de soutien pour l'enseignant dans sa profession. Toute évaluation réaliste de la situation actuelle nous mène à la même conclusion: il n'y a pas de théorie cohérente, validée empiriquement pour guider le développement du curriculum ou de l'enseignement des mathématiques. Quand on échange avec les enseignants, on constate que ces rercherches ont un impact très limité sur la scène de l'enseignement des mathématiques. Cela ne peut en rester là; il y a toute une masse de travail effectué par les psychologues qu'il faudrait chercher à traduire dans notre enseignement. Shumway (1982) précise:

> Pour exploiter cette masse de travail, cela aiderait d'apprendre le vocabulaire des psychologues et d'utiliser les mêmes mots pour les mêmes structures. De plus, comme la théorie des groupes finis a été utile et intéressante aux physiciens, nous devrions considérer le travail des psychologues pour des applications potentielles de notre travail en didactique des mathématiques. Une telle quête nous donne accès à un nombre incroyable de nouvelles idées. En 1979, les éducateurs en mathématiques ont produit 554 recherches fichées (Suydam et Weaver, 1980) et les psychologues ont produit 13 684 recherches (Psychological Abstract, 1980). Nous ne pouvons plus ignorer un tel ensemble de travail sur l'apprentissage.

Il y a un grand besoin de mener des recherches liant l'enseignement des mathématiques à la science cognitive. Malheureusement, Brophy (1986) constate qu'il n'est pas facile de les réaliser:

> On a un grand besoin de recherches de ce dernier type mais elles ne peuvent être menées efficacement ni par les spécialistes de la matière qui se concentrent sur le curriculum et les acquis de connaissance mais donnent peu d'élan à l'enseignement en classe ou par des psychologues et autres qui sont devenus plus sophistiqués relativement à l'enseignement en classe mais manquent d'expérience dans la discipline concernée. Si nous voulons aller plus loin, si nous voulons converger vers des études d'un type plus sophistiqué, il sera nécessaire que les éducateurs en mathématiques et les psychologues ou autres personnes étudiant des aspects plus généraux de l'enseignement soient plus ouverts et réceptifs à ce que chacun a à offrir et, idéalement, à commencer à travailler en collaboration.

Les psychologues s'intéressant à l'apprentissage et les enseignants de mathématiques sont des gens ayant des compétences différentes mais s'intéressant à des problèmes d'intérêt commun. De plus fréquentes collaborations sont souhaitables et réalisables. Comme le mentionne Brophy (1986), cela met en cause deux types de formation fort différents et les acteurs de chaque camp doivent apprendre à collaborer s'ils veulent faire des réflexions plus profondes à l'intérieur de recherches sur l'école. Cette position suggère fortement que les enseignants devraient comprendre l'apprentissage différemment et qu'ils devraient devenir des étudiants de l'apprentissage, pas seulement des dispensateurs de savoir (Silver, 1987). Finalement, Grennon Brooks (1990) rapporte les propos suivants:

> En fait, Duckworth (1987) observe que l'enseignant est dans une position pour poursuivre les questions concernant le développement de la compréhension que personne d'autre ne peut poursuivre de la même façon. Elle continue en décrivant l'enseignement comme de la recherche: "Ce type de chercheur sera un enseignant dans le sens de se soucier du fonctionnement de certaines parties de l'Univers, suffisamment pour les rendre accessibles aux autres; il devra être fasciné par les questions concernant l'engagement des gens dans une démarche leur permettant d'y apporter un sens véritable".

6. Suites du projet

En conclusion, c'est un peu le défi que pose l'implantation de notre modèle. D'abord, l'enseignant devra construire ou sélectionner du matériel didactique en se servant de ses connaissances en mathématiques, de ses connaissances en pédagogie en privilégiant l'esprit constructiviste, de son expérience d'enseignant et de ses forces créatrices. Par la suite, il lui faudra expérimenter ce matériel en classe, l'adapter selon les réactions observées, le degré de compréhension manifesté et le sens que l'élève a pu développer des objets de l'apprentissage. Ces réactions conjuguées aux échanges avec ses collègues lui permettront de parfaire ses approches et d'y trouver une source de satisfaction. Quand on produit une belle série de problèmes d'enrichissement et qu'on voit l'étincelle dans l'oeil de l'élève qui l'attaque ou quand on observe le plaisir qu'éprouve un groupe à travailler à une activité d'exploration que l'on a créée ou encore quand un élève montre une certaine autonomie en résolvant un problème défi que l'on a conçu, c'est une satisfaction qui fait vite oublier les heures consacrées à la réalisation de ces activités. La prochaine décennie ne sera pas facile pour l'enseignant de mathématiques. Nous espérons sincèrement que le PROJET MATHÉTACTIQUES ouvrira des perspectives nouvelles permettant aux élèves de s'épanouir sur le plan intellectuel et permettant à nos collègues de vivre des moments de satisfaction comme ceux que nous venons de décrire.

7

BIBLIOGRAPHIE

7. Bibliographie

Albers, D.J. & Alexenderson, G.L. (1985). *Mathematical people: profiles and interviews*. Cambridge: Birkhaüser.

Association of teachers of mathematics. *Teaching syles: a response to COCKROFT 243*. Derby, 1984.

Aylwin U. (1991). *La dynamique de l'enseignement et de l'apprentissage*. Texte non publié.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction and knowledge: alternative perspectives for mathematics education. In D.A. Grows & T.J. Cooney (Eds.), *Effective mathematics teaching*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Bertrand Y. (1990). Pour réussir en mathématique. *Vie pédagogique*, no. 64, janvier-février 1990.

Bertrand Y. (1990). Un modèle inductif d'enseignement. *Vie pédagogique*, no. 66, avril 1990.

Bertrand Y. & Girault, Y. (1990). Une approche différente de la didactique des sciences. *Vie pédagogique*, no. 65, mars 1990.

Blais, D.M. (1988). Constructivism- A theoretical revolution for algebra. *Mathematics Teacher*, november 1988.

Branca, N.A. (1980). Problem solving as a goal, process, and basic skill. In S. Krulik (Ed.), *Problem Solving in School Mathematics*, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va.: The Council.

Branca, N.A. (1985). Mathematical problem solving: lessons from the british experience. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Brophy, J. (1986). Teaching and learning mathematics: where research should be going. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1986, vol. 17, no. 5, pp. 323-346.

Brophy, J. (1987). Synthesis of research on strategies for motivating students to learn. *Educational Leadership*, october 1987, pp. 40-48.

Campbell, P.J. & Grinstein, L.S. (1988). *Mathematics education in secondary schools and two-year colleges. A source book*. New York: Garland Publishing.

Cayrol, A. & De Saint-Paul, J. (1984). *Derrière la magie*. Paris: InterÉditions.

Charles, R. & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how*. Palo Alto, Ca.: Dale Seymour Publications.

7. Bibliographie

Charles, R. & Silver, E.A., eds (1988). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Research Agenda for Mathematics Education, vol. 3. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and theories of instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23, pp. 87-104.

Comité inter-associations des États généraux de l'enseignement des mathématiques. (1990). *Mathématiquement vôtre - Défis et perspectives pour l'enseignement des mathématiques*. Les éditions Agence D'ARC inc.

Commiot, D. (1987). Les maths bouleversées par l'informatique. *Sciences et Avenir*, octobre 1987.

Confrey, J. (1987). The constructivist. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol. 3, Montréal, pp. 307-317.

Dacunha Castelle, D. (1989). *Rapport de la mission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Juin 1989.

D'Amour, C. (1988). Une autre façon de voir les mathématiques... et les enseigner. *Pédagogie collégiale*, octobre 1988.

D'Amour, C. (1989). Aide à l'apprentissage et formation fondamentale. *Impressions pédagogiques*, bulletin d'information pédagogique du Collège Ahuntsic, vol. 4, no. 1, novembre 1989.

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Company.

Davis, R.B., Maher, C.A. & Nodding, N., eds (1990). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Monograph, no. 4. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Département de mathématiques du cégep du Vieux-Montréal. (1988). Manifeste sur la formation fondamentale au niveau collégial. *Matrice*, mars 1988.

Desrosiers-Sabbath, Rachel (1984). *Vers un système de modèles d'enseignement*. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Dionne, J.J. (1988). *Vers un renouvellement de la formation et du perfectionnement des maîtres du primaire: le problème de la didactique des mathématiques*. Les publications de la faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal.

Doise, Willem (1985). Psychologie sociale et constructivisme cognitif. *Archives de psychologie*, 53, pp. 127-140.

Faulkner, M. (1989). *Vers une didactique des mathématiques*. Collège de l'Assomption.

7. Bibliographie

G.D.M. - MOIFEM. (1989). Document de travail du comité G.D.M. - MOIFEM sur les fonctions sociales de l'enseignement des mathématiques, octobre 1989.

Goldin, G.A. (1989). Constructivism epistemology and discovery learning in mathematics. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th international conference of PME*, vol. 2, Paris, pp. 15-22.

Grégoire, R., Turcotte, G. & Dessureault, G. (1985). *Étude de la pratique professionnelle des enseignants et enseignantes de cégep*. Collection Études et réflexions sur l'enseignement collégial 1985-1986. Conseil des Collèges.

Grennon Brooks, J. (1990). Teachers and students: constructivists forging new connections. *Educational Leadership*, february 1990.

Groupe REPARTIR. (1990). L'école de demain et les nouvelles technologies de l'information. *Le Bus*, vol. 7, no. 4, février 1990.

Grouws, D.A., Good, T.A. & Dougherty, B.J. (1990). Teacher conceptions about problem solving and problem-solving instruction. In G. Booker, P. Cobb & T.N. de Mendicuti, *Proceedings of the 14th international conference of PME*, vol. 1, Mexico, pp. 135-142.

Heller, J.I. & Hungate, H.N. (1985). Research on scientific problem solving. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hofmeister, A.M. (1989). Teaching problem-solving skills with technology. *Educational Technology*, vol. 29, no. 9, september 1989, pp. 26-29.

Jockusch, E.A. & McLoughlin, P.J. (1990). Building key concepts for calculus in grades 7-12. *Mathematics Teacher*, october 1990.

House, P.A. (1980). Risking the journey into problem solving. In S. Krulik (Ed.), *Problem Solving in School Mathematics*, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va.: The Council.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J. (1987) What constructivism might be in mathematics education. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol.1, Montréal, pp. 3-27.

Kitchener, R.F. (1986). *Piaget's theory of knowledge*. Yale University Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. New York: Oxford University Press.

7. Bibliographie

Knowles, M. (1990). *L'apprenant adulte, vers un nouvel art de la formation*. Les Éditions d'Organisation.

Krulik, S. & Rudnick, J.A. (1980). *Problem solving. A handbook for teachers*. Boston: Allyn & Bacon.

Lester, F.K. jr. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lythcott, J. (1990). Problem solving and requisite knowledge of chemistry. *Journal of Chemical Education*, vol. 67, no. 3, mars 1990, pp. 248-252.

Marzano, R.J., Pickering, D.J. & Brandt, R.S. (1990). Integrating instructional programs through dimensions of learning. *Educational Leadership*, february 1990, pp. 17-24.

Mason, J. (1989). Teaching (pupils to make sense) and assessing (the sense they make). In P. Ernest (Ed.), *Mathematical teaching: the state of the art*. Philadelphia, PA: The Falmer Press.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. New York: Addison-Wesley.

McLean, L.D. (1988). Achievement measures made relevant to pedagogy. *McGill Journal of Education*, vol. 23, no. 3, automne 1988.

McLeod, D.B. (1985). Affective issues in research on teaching mathematical problem solving. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

McLeod, D.B. (1987). A constructivist approach to research on attitude toward mathematics. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol. 1, Montréal, pp. 133-139.

Meiring, S.P. (1980). *Problem-solving... a basic mathematical goal*, tomes 1 et 2. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishing Co.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1989). Essential Mathematics for the Twenty-first Century. *The Mathematics Teacher*, march 1989.

National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for Mathematics*. Reston, Va.: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *News Bulletin*. January 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, Va.: The Council.

7. Bibliographie

National Research Council. (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Nesher, P. Beyond constructivism (Learning mathematics at school). In A. Bordás (Ed.) *Proceedings of the 12th international conference of PME*, vol. 1, Veszprém, pp. 54-74.

Noddings, N. (1985). Small groups as a setting for research on mathematical problem solving. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Owens, J.E. (1987). Personal constructs of mathematics and mathematics teaching. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol.1, Montréal, pp. 163-169.

Owen, E. & Sweller, J. (1985). What do students learn while solving mathematical problems? *Journal of Educational Psychology*, 1985, vol. 77, no.3, pp. 272-284.

Owen, E. & Sweller, J. (1989). Should problem solving be used as a learning device in mathematics? *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, pp. 322-328.

Pace, J.P. (1987). Toward a constructivist direction in mathematical problem solving. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol.1, Montréal, pp. 177-183.

Pace, J.P. (1988). Constructivism, viability and values. In M. J. Behr, C. B. Lacampagne & M. M. Wheeler (Eds.). *Proceedings of the 10th annual meeting of NA-PME*, vol. 1, DeKalb, Illinois, pp. 30-35.

Paul, R.W. (1990). *Critical thinking: What every person needs to survive in a rapidly changing world*. J.A. Binker (Ed.). Center for Critical Thinking and Moral Critique. Sonoma State University. Rohnert Park, CA.

Phye, G.D. & Andre, T. (1986). *Cognitive classroom learning: Understanding, thinking and problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.

Piaget, J. (1967). *La psychologie de l'intelligence*. Paris: Armand.

Piaget, J. (1970). *The Principles of Genetic Epistemology*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pollak, H.O. (1987). Cognitive science and mathematics education: a mathematician perspective. In A.H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Polya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème*. Paris: Dunod.

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Tome 2. Paris: Dunod.

7. Bibliographie

Publicité Merrill Publishing company. *Mathematics Teacher*, september 1989, pp. 484-485.

Resnick, L.B. (1987). *Education and learning to think*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Resnick, L.B. & Nelson-LeGall, S. (1987). Meaning construction in mathematical problem solving. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol.3, Montréal, pp. 215-221.

Reumont, A. (1990). *PROB-HABILETÉS: Une pédagogie active de l'apprentissage des probabilités*. Éditions Mathémagiques.

Reumont, A. & Reumont, P. (1990). *PROJET MATHÉTACTIQUES. Mémoire de présentation dans le cadre de PAREA*. Janvier 1990.

Rogalski, J. (1988). Teaching and learning methods for problem-solving: some theoretical issues and psychological hypotheses. In A. Bordàs, *Proceedings of the 12th international conference of PME*, vol. 2, Vesztrém, pp. 528-535.

Ruiz-Zuniga, A. (1987). Epistemological determinants of mathematical construction, implications in its teaching. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol.3, Montréal, pp. 325-331.

Sawrey, B.A. (1990). Concept learning versus problem solving: revisited. *Journal of Chemical Education*, vol. 67, no. 3 , mars 1990, pp. 253-255.

Schmalz, R. (1989). Problem-solving - an attitude as well as a strategy. *Mathematics Teacher*, december 1989.

Schoenfeld, A.H. (1980). Heuristics in the classroom. In S. Krulik (Ed.), *Problem solving in School Mathematics*, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va.: The Council.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1987a). Cognitive science and mathematics education: an overview. In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (1987b). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (1987c). A brief and biased history of problem solving. In F.R. Curcio (Ed.), *Teaching and learning: a problem-solving focus*. Reston, Va.: The Council.

7. Bibliographie

Schoenfeld, A.H. (1988a). Problem solving. In P.J. Campbell & L.S. Grinstein (Eds.), *Mathematics education in secondary schools and two-year colleges. A source book*. New York: Garland Publishing.

Schoenfeld, A.H. (1988b). When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23, pp. 145-166.

School Science and Mathematics Association. (1985). *Science and Mathematics Education for the year 2000 and beyond*. Bowling Green, Ohio.

Shulman, L.S. (1985). On teaching problem solving and solving the problems of teaching. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Shumway, R.J. (1982). Problem-solving research : a concept learning perspective. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: issues in research*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Sigel I.E. (1978). Constructivism and teacher education. *The Elementary School Journal*, vol. 78, no. 5.

Silver, E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some underrepresented themes and needed directions. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silver, E.A. (1987). Fondations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sinclair, H. (1987). Constructivism and the psychology of mathematics. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol.1, Montréal, pp. 28-41.

Slavin, R.E. (1987). Cooperative learning and the cooperative school. *Educational Leadership*, november 1987.

Steen, L.A. (1987). Mathematics Education: A Predictor of Scientific Competitiveness. *Science*, vol. 237, july 1987.

Steen, L.A. (1989). Teaching mathematics for tomorrow's world. *Educational Leadership*, september 1989.

Streefland, L. (1988). Reconstructive learning. In A. Bordás, *Proceedings of the 12th international conference of PME*, vol. 1, Veszprém, pp. 75-90.

Streun, A. van (1990). The teaching experiment "Heuristic mathematics education". In G. Booker, P. Cobb & T. N. de Mendicuti, *Proceedings of the 14th international conference of PME*, vol. 1, Mexico, pp. 93-99.

7. Bibliographie

Sweller, J. (1989). Cognitive technology: some procedures for facilitating learning and problem solving in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology*, vol. 81, no. 4, pp. 457-466.

Tarmizi, R.A. & Sweller, J. (1988). Guidance during mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 1988, vol. 80, no. 4, pp. 424-436.

Thomas, D.A. (1984). Understanding the central limit theorem. *Mathematics Teacher*, october, 1984.

Thompson, P.W. (1982). Were lions to speak, we wouldn't understand. *Journal of mathematical behavior*, vol. 3, no. 2, pp. 147-165.

Thompson, P.W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: considerations in developping mathematics curricula. In E.A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vanderstraeten, G. & Burney-Vincent, C. (1991). Prétest de mathématiques à l'École Polytechnique. *Bulletin AMQ*, mars 1991.

Vergnaud, G. (1987). About constructivism: a reaction to Hermine Sinclair's and Jeremy Kilpatrick's papers. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol. 1, Montréal, pp. 43-54.

Verin, A. (1987). Diversité des situations pédagogiques en sciences expérimentales et des modalités d'interactions qu'elles définissent. *On n'apprend pas tout seul: interactions sociales et construction des savoirs*. C.R.E.S.A.S.: Ed. ESF.

von Glaserfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

von Glaserfeld, E. (1989). Cognition, construction of knowledge and teaching. *Synthèse*, vol. 80, no. 1, juillet 1989.

Weinberg, D. & Gavelek, J. (1987). A social constructivist theory of instruction and the development of mathematical cognition. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference of PME*, vol. 3, Montréal, pp. 346-352.

Willoughby, S.S. (1981). *Teaching mathematics: what is basic?* Council for basic education.

Willoughby, S.S. (1990). *Mathematical education for a changing world*. Alexandria, VA: The Association for Supervisors and Curriculum Development (ASCD).